Chapitre 3 : Les suites – Solutions exercices niveau 2

Exercice 1

$\forall u \in \mathbb{R}\ [u] \leq u < [u] + 1 \Rightarrow u - 1 < [u] \leq u$

$\forall n \geq 1,\ nx - 1 < [nx] \leq nx \qquad x - \frac{1}{n} \leq \frac{[nx]}{n} < x$

$\lim_{n \to +\infty} x - \frac{1}{n} = x$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \frac{[nx]}{n} = x$.

Exercice 2

1) a) $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc $f(u_n) - u_n \sim_{+\infty} -\alpha u_n^2 \qquad u_{n+1} - u_n \sim_{+\infty} -\alpha u_n^2$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\alpha u_n$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad u_{n+1} \sim_{+\infty} u_n$

b) $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \quad u_{n+1} - u_n \sim_{+\infty} -\alpha u_n^2$ et $u_{n+1} \sim_{+\infty} u_n$

donc $v_n \sim_{+\infty} \frac{p\ \alpha u_n^2}{u_n u_n} \sim_{+\infty} p\alpha$. Donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = \alpha$.

c) D'après le théorème de Césaro, on a donc : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \alpha$

2) a) $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}$ (sommes télescopiques)

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$ (et $\frac{1}{u_0}$ est une constante) donc $\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim_{+\infty} \frac{1}{u_n}$

b) Or $\sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim_{+\infty} n\alpha$ donc $\frac{1}{u_n} \sim_{+\infty} n\alpha \quad u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n\alpha}$

Exercice 3

1) Par récurrence :

_ $u_0 \in I$ d'après l'énoncé

_ supposons qu'à un rang n, $u_n \in I$

Donc $f(u_n) \in I$ (car $f(I) \subset I$) donc $u_{n+1} \in I$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

2) Si f est croissante sur I

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$:

_ $g(u_0) > 0$ donc $f(u_0) - u_0 > 0 \quad u_1 - u_0 > 0 \quad u_1 > u_0$

_ supposons qu'à un rang n, $u_{n+1} \geq u_n$

Comme f est croissante sur I, $f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \quad u_{n+2} \geq u_{n+1}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$ la suite est croissante.

b) Si $g(u_0) < 0 \quad u_1 < u_0$.

De la même manière qu'en a, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$. La suite est décroissante.

3) Si f est décroissante sur I

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{2n+1} = f(u_{2n}) = f(v_n)$

$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = h(u_{2n}) = h(v_n)$

$w_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = h(u_{2n+1}) = h(w_n)$

b) h est la composée de deux fonctions décroissantes, donc elle est croissante

(si $x \leq y$ $f(x) \geq f(y)$ $f(f(x)) \leq f(f(y))$ $h(x) \leq h(y)$)
Comme $v_{n+1} = h(v_n)$, on se ramène à la question 2. Donc (v_n) est monotone. De même pour (w_n).
Comme $w_n = f(v_n)$, avec f décroissante, (w_n) et (v_n) sont de sens de variations opposés
(si $v_{n+1} \geq v_n$ $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$ $w_{n+1} \leq w_n$ si $v_{n+1} \leq v_n$ $f(v_{n+1}) \geq f(v_n)$ $w_{n+1} \geq w_n$.

4) Un exemple

a) Soit $f \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{1+x} \end{cases}$. On voit que f est dérivable sur [0;1] et que $\forall\, x \in [0;1]$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$

x	0	1
f(x)	1 $\searrow$	1/2

On a donc $f([0;1]) = [1/2;1] \subset [0;1]$.
Comme $u_0 \in [0;1]$, on est dans les conditions de l'énoncé.
Donc d'après la question 1, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

(Ou plus directement : si $0 \leq x \leq 1$ $1 \leq 1 + x \leq 2$ $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1$ $\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ donc $f(x) \in [0;1]$…)

b) Comme f est décroissante, d'après la partie 3, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposés. Comme elles sont minorées par 0 et majorées par 1, elles convergent toutes les deux (mais n'ont pas forcément la même limite).

c) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+x}} = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{\dfrac{2+x}{1+x}} = x \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{2+x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x(2+x) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 5$ Deux solutions $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc ne convient pas. $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$4 < 5 < 9$ donc $2 < \sqrt{5} < 3$ $1 < \sqrt{5} - 1 < 2$ $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ donc $x_2 \in [0;1]$.

d) Gardons les notations de la partie 3. Appelons L et L' les limites de (v_n) et (w_n).

Comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$, d'après le théorème du point fixe, $L = g(L)$ $L = f(f(L))$ $L = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+L}}$

D'après la question précédente, on a $L = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

De même, comme $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = g(w_n)$, on a $L' = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. Donc la suite (u_n) converge (vers $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$).