Chapitre 3 : Les suites

1. Démonstration par récurrence

Propriété :

Soit P_n une proposition qui dépend d'un entier naturel n telle que :

_ P_0 est vraie (initialisation)

_ si on suppose P_n vraie à un rang n quelconque (hypothèse de récurrence), alors P_{n+1} est vraie (hérédité)

Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est vraie

Remarques :

_ la récurrence s'utilise pour montrer une **propriété** (égalité, inégalité, ...) **qui dépend d'un entier n** et qui est **donnée dans l'énoncé** (ou par conjecture).

(question du type : "Montrer que, $\forall n \in \mathbf{N}$, ...")

_ Pour faire une démonstration par récurrence, il est nécessaire d'avoir **au préalable** une **relation de récurrence** (lien entre les rangs n et $n+1$) :

Ex : $u_{n+1} = f(u_n)$, $x^{n+1} = x^n \times x$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$, si $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$...

_ en général, **une relation de récurrence ne se montre pas par récurrence** (sauf pour montrer qu'une suite est croissante ou décroissante).

_ pour l'initialisation, dans le cas d'une égalité ou d'une inégalité, étudier **séparément les deux membres**.

_ pour une question du type "Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n \geq \dots$ ", il faut montrer les deux parties dans la même récurrence. (**principaux problèmes d'existence : quotient, racine carrée, ln**)

Exemples :

1) Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + 2 + \frac{1}{u_n^2} \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \geq 1, u_n \geq 2n - 1$

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 1 \end{cases}$
 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

2. Généralités sur les suites

2.1 Les suites usuelles

Définition – Propriété :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

_ S'il existe un réel r tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$, alors on dit que (u_n) est une **suite arithmétique de raison r** .

Dans ce cas, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr \quad u_n = u_p + (n - p)r$.

_ S'il existe un réel $q \neq 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$, on dit que (u_n) est une **suite géométrique de raison q** .

Dans ce cas, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$

_ S'il existe deux réels $a (\neq 0 \text{ et } 1)$ et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$, on dit que (u_n) est une **suite arithmético-géométrique**.

Dans ce cas, on appelle **point fixe** le réel α tel que $\alpha = a\alpha + b$.

La suite $v_n = u_n - \alpha$ est alors **géométrique de raison a** .

_ S'il existe deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, alors on dit que (u_n) est une **suite linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants**.

Dans ce cas, on appelle **équation caractéristique** l'équation : $x^2 = ax + b$.

Soit Δ le discriminant de cette équation.

_ si $\Delta > 0$: soient x_1 et x_2 les deux solutions de l'équation.

Alors il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$.

_ si $\Delta = 0$: soit x_0 la solution de l'équation.

Alors il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n$.

Exemples :

1) Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

2) Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Remarque :

Soit (u_n) une suite. S'il existe un réel $q > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq q \cdot u_n$, alors on peut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq q^n u_0$ (ou similaire)

2.2 Majorant, minorant, sens de variation

Rappels :

Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

Une suite (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

Une suite (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie en général le **signe de $u_{n+1} - u_n$**

Ex : Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \geq 1, u_n = \frac{2^n}{n!}$. Etudier le sens de variation de (u_n) .

3. Limite d'une suite

Rappel : Valeur approchée :

Soit a et b des réels et $\varepsilon > 0$.

On dit que b est une valeur approchée de a à ε près si : $|b - a| \leq \varepsilon$ ($\Leftrightarrow b - \varepsilon \leq a \leq b + \varepsilon$).

En particulier $|u_n - L| \leq \varepsilon$ signifie que u_n est une valeur approchée de L à ε près.

3.1 Limites usuelles

Propriété :

Si $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ si $q \leq -1$, (q^n) n'a pas de limite.

Propriété : (Croissances comparées)
voir chapitre 1

3.2 Théorèmes de convergence

Propriété : **Composée par une fonction continue**

Soit (u_n) une suite. Soit f une fonction définie sur un ensemble D , tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in D$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ ($L \in D$) et si f est continue en L , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(L)$.

Ex : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{n^2}\right)$?

Théorème de comparaison :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

_ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

_ Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété : "Passage à la limite dans une inégalité"

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

Si (u_n) et (v_n) admettent des limites réelles, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Remarques :

_ Attention, pour utiliser cette propriété, il faut avoir auparavant montré que (u_n) et (v_n) convergent.

_ Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$, on a seulement l'inégalité large sur les limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Ex : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n}$ et les limites sont les mêmes

Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)

Soient u, v, w trois suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n$.

S'il existe un réel L tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$,

alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Propriété de la limite monotone :

- _ Toute suite **croissante** et **majorée** (par une constante) converge.
- _ Toute suite **croissante** et **qui ne converge pas** tend vers $+\infty$.
- _ Toute suite **décroissante** et **minorée** (par une constante) converge.
- _ Toute suite **décroissante** et **qui ne converge pas** tend vers $-\infty$.

Remarque :

Si (u_n) est croissante et majorée par un réel M , alors (u_n) converge vers un réel L tel que $L \leq M$.

Si (u_n) est décroissante et minorée par un réel m , alors (u_n) converge vers un réel L tel que $L \geq m$.

Définition :

Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si :

- (1) (u_n) est **croissante**
- (2) (v_n) est **décroissante**
- (3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Propriété :

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**, alors elles **convergent** toutes les deux, et ont la **même limite**.

Propriété : Suites extraites

Soit (u_n) une suite. Soit L un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$.

- _ Si (u_n) tend vers une **limite L (finie ou infinie)**, alors les suites (u_{n+1}) , (u_{2n}) , (u_{2n+1}) **tendent vers L**
- _ Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une **même limite L (finie ou infinie)**, alors la suite (u_n) **tend aussi vers L** .

4. Suites récurrentes ($u_{n+1} = f(u_n)$)

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle I et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

4.1 Suites majorées, minorées, variations

Pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq A$ (ou $u_n > A, u_n \leq A, A \leq u_n \leq B, \dots$), on procède en général **par récurrence**.

Pour l'hérédité, on peut :

- _ soit **utiliser les règles sur les inégalités** si l'expression est simple (une seule fois u_n dans l'expression)
- _ soit **utiliser le sens de variation de f** : (si plusieurs fois u_n dans l'expression)
Ex : si $u_n \geq A$ et f croissante, alors $f(u_n) \geq f(A)$
- _ soit étudier le **signe de $u_{n+1} - A$**

Rappel : On peut additionner deux inégalités, mais on ne peut pas :

- _ soustraire deux inégalités
- _ multiplier deux inégalités (sauf si tout est positif)
- _ diviser deux inégalités

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n - 9}{u_n - 1} \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et $u_n \geq 3$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que l'intervalle I est **stable par f** si $f(I) \subset I$. (c'est-à-dire $\forall x \in I, f(x) \in I$)

Remarque :

Si $u_0 \in I$ et si I est **stable par f** , alors on peut montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in I$. (si $u_n \in I$ alors $f(u_n) \in I$ (car I stable par f) donc $u_{n+1} \in I$).

Variations :

Pour montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} \geq u_n$ (ou $u_{n+1} \leq u_n$), on peut procéder **par récurrence** :

Ex : si $u_n \leq u_{n+1}$ et si f croissante, on a : $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

Attention, le sens de variation de f et celui de (u_n) ne sont pas forcément les mêmes !

Ex : suite de l'exemple précédent : Montrer que (u_n) est décroissante.

De manière générale, on peut retenir la propriété suivante :

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que I est stable par f .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Si f est **croissante** sur I , alors la suite (u_n) est **monotone**.

Remarques :

_ donc, si f croissante sur I et si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante

si f croissante sur I et si $u_0 \geq u_1$, la suite (u_n) est décroissante

_ si f est décroissante, alors (u_n) n'est pas monotone. Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposé.

4.2 Point fixe

Rappel : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
On appelle **point fixe de f** tout $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

Remarque : Dans le cas d'une suite récurrente ($u_{n+1} = f(u_n)$), si u_0 est un point fixe de f , alors la suite (u_n) est constante.

Théorème du pont fixe :

Soit f est une fonction continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ (I est stable par f).

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Si (u_n) converge vers un réel L , alors L est un point fixe de f (c'est-à-dire $f(L) = L$).

(Les seules limites réelles possibles sont les points fixes de f).

Remarque : Ce théorème permet en particulier de trouver la valeur de la limite, après avoir montré que la suite converge, par propriété de la limite monotone par exemple.

Exemple :

1) Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} \end{cases}$. On admet que (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ et (u_n) croissante.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4.3 Inégalité des accroissements finis

Utilisation de l'Inégalité des accroissements finis : (Méthode à connaître)

Si : f admet un **point fixe** $\alpha \in I$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

f est dérivable sur I et il existe un réel K tel que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$

Alors, d'après l'I.A.F.,

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq K |u_n - \alpha| \text{ donc } |u_{n+1} - \alpha| \leq K |u_n - \alpha|$$

Ensuite, on peut montrer par récurrence que

$$\forall n \geq p, |u_n - \alpha| \leq K^{n-p} |u_p - \alpha| \text{ (ou équivalent)}$$

On a donc $0 \leq |u_n - \alpha| \leq K^n |u_0 - \alpha|$

Si de plus, si $0 < K < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} K^n |u_0 - \alpha| = 0$.

On a alors, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha.$$

Remarques :

$_$ dans ces conditions, (u_n) tend bien vers un point fixe de f .

$_$ attention, pensez à **vérifier les intervalles** : si $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$, il faut vérifier que $\alpha \in I$ et $u_n \in I$.

$_$ On a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq K^n |u_0 - \alpha|$

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour que u_n soit une valeur approchée de α à ε près ($\Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leq \varepsilon$), il SUFFIT que $K^n |u_0 - \alpha| \leq \varepsilon$.

Il reste à résoudre cette inéquation.

Exemple :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2/2}$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]$

– l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution λ sur l'intervalle $[0;1]$.

– $\forall x \in [0;1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \lambda|$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \lambda| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3) Déterminer un rang n_0 à partir duquel u_n est une valeur approchée de λ à 10^{-3} près.

5. Suites implicites

Principe :

Soit f une fonction et (v_n) une suite connue.

Si $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = v_n$ admet une unique solution, alors en appelant u_n cette solution, on définit une suite (u_n) , dont on n'a pas l'expression, mais que l'on souhaiterait étudier.

Méthodes :

_ pour comparer u_n à un réel, on compare les images, et on utilise le sens de variation de f .

_ pour trouver une relation d'égalité sur u_n , on part de la formule $f(u_n) = v_n$. (c'est la seule égalité qu'on ait sur u_n !)

_ pour étudier le sens de variation de u_n , on compare $f(u_n)$ et $f(u_{n+1})$, et on utilise le sens de variation de f .

_ si f réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J , alors f admet une application réciproque f^{-1} de J sur I . Dans ce cas, $f(u_n) = v_n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(v_n)$.

Cette expression permet de trouver certaines propriétés sur u_n .

_ comme il n'y a pas de relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} , **toute démonstration par récurrence est impossible** sur des suites implicites. (pas de théorème du point fixe non plus)

Exemple :

On a vu (chapitre 2) que la fonction $f(x) = e^x - x$ avait le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$
	1	

1) Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) d'éléments de $[0; +\infty[$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = e^n.$$

2) Étudier le sens de variation de (u_n) .

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq u_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4) Montrer que $e^{u_n} \sim_{+\infty} e^n$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - n) = 0$.

Remarque : (Limite programme)

Soit f_n une fonction qui dépend d'un entier naturel n .

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur un intervalle I , on définit également une suite implicite (u_n) .

Les méthodes sont les mêmes que précédemment, en remplaçant f par f_n , sauf pour le sens de variation.

Etude du **sens de variation** :

- _ on **compare $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$** pour $x \in I$ et on déduit une inégalité entre $f_{n+1}(u_n)$ et $f_n(u_n)$
- _ or $f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ donc on déduit une inégalité entre $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$
- _ on conclue en utilisant le sens de variation de f_{n+1} .

Ex : Soit $n \geq 1$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^x + n.x - 2$.

On admet que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.