Chapitre 3 - Probabilités

Rappels : Soit A un événement

_ A est un **événement**, c'est-à-dire un ensemble. Opérations possibles : $\overline{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$

_ card(A) est un **nombre entier.** Opérations possibles : +, –, ×, /

_ P(A) est un **nombre réel entre 0 et 1**. Opérations possibles : +, –, ×, /

Pas d'égalités entre deux éléments de nature différente !

1. Dénombrements / Probabilités

Choix de p éléments dans un ensemble de n éléments

- Eléments **distincts**
  - **Avec ordre** : $n(n-1)\dots(n-p+1)$ possibilités *(ex : tirages successifs sans remise)*
  - **Sans ordre** : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ possibilités *(ex : tirages simultanés)*
- Eléments **non distincts** (**avec ordre**) : n^p possibilités *(ex: tirages successifs avec remise, lancers)*

Exemples :

On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10.

1) On tire 3 boules successivement et avec remise :

$card(\Omega) = 10^3$

2) On tire 3 boules successivement et sans remise :

$card(\Omega) = 10 \times 9 \times 8 = 720$

3) On tire 3 boules simultanément :

$$card(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$

Equiprobabilité (probabilité uniforme) : $$\mathbf{P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Exemple :

Dans l'urne précédente, on tire trois boules successivement et avec remise.

Quelle est la probabilité que les trois boules soient distinctes ?

$card(\Omega) = 10^3 = 1000$ $\quad card(A) = 10 \times 9 \times 8 = 720$ $\quad P(A) = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{10 \times 10 \times 10} = \dfrac{9 \times 2}{5 \times 5} = \dfrac{18}{25}$

Probabilité conditionnelle : Soit A et B deux événements. Si $P(A) \neq 0$, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Attention : Ne pas confondre $P(A \cap B)$: probabilité d'avoir A et B

$P_A(B)$: probabilité d'avoir B si on est dans la situation A.

A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Si $P(A) \neq 0$, A et B indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$.

2. Probabilité d'une réunion, d'une intersection

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements.

_ $\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)} = \begin{cases} P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \text{ si } A_1, \ldots, A_n \textbf{ incompatibles} \\ \text{formule du crible sinon} \end{cases}$

_ $\mathbf{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)} =$

$$\begin{cases} P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \text{ si } A_1, \ldots, A_n \textbf{ indépendants} \\ P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n) \text{ sinon (formule des probabilités composées)} \end{cases}$$

Remarques :

_ En particulier, si $P(A) \neq 0$, alors $\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$

_ si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$

Ex : On lance un dé jusqu'au premier 6.

Quelle est la probabilité d'avoir lancé 5 fois le dé ?

$A = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4} \cap S_5$ par indépendance : $P(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6}$

Probabilité d'une réunion infinie :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

Si les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux **incompatibles**, alors la série $\sum P(A_n)$ converge et $\mathbf{P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)}$

3. Formule des probabilités totales

Soit $(A_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ une famille d'événements d'un univers Ω.
On dit que la famille forme un système complet d'événements si :
_ pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$
_ $\bigcup_{i \in \{1, \dots, p\}} A_i = \Omega$

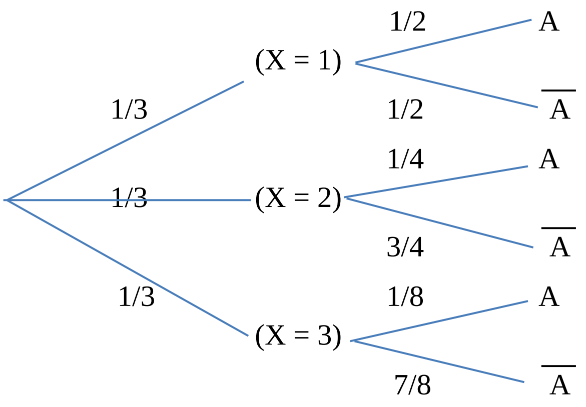
Remarques :
_ Un S.C.E. peut être représenté par les branches d'un arbre.
_ Si $(A_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ forment un S.C.E., $\sum_{i=1}^{p} P(A_i) = 1$

Propriété : **Formule des probabilités totales** : Soit B un événement
Soit $A_1, A_2, \dots, A_p$ un S.C.E de Ω. tel que $\forall i \in \{1, .. , p\}$, $P(A_i) \neq 0$.
Alors $\mathbf{P(B)} = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P(A_i \cap B)} = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{P_{A_i}(B)P(A_i)}$

Deux applications :
_ Dans une expérience aléatoire **à deux étapes**, la FPT permet de calculer la probabilité liée à la **deuxième étape**.
_ **Marches aléatoires :**
On considère un système qui peut avoir plusieurs états (en général 2, 3 ou 4). A chaque étape il passe d'un état à un autre de manière aléatoire.
En utilisant comme S.C.E. les états à l'étape n, on trouve les probabilités à l'étape n+1 en fonction des probabilités à l'étape n. (il reste ensuite à étudier des suites récurrentes).

Exemple :
Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire une boule dans cette urne, on note X le numéro inscrit, puis on lance X fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité de ne faire que des piles ?

$X \longrightarrow U([[1;3]])$ Soit A : "on obtient des piles"



(X = 1), (X = 2) et (X = 3) forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, $P(A) = P(X = 1)P_{(X=1)}(A) + P(X = 2)P_{(X=2)}(A) + P(X = 3)P_{(X=3)}(A)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{2}{24} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}.$$

Conclusion :

Pour déterminer la probabilité d'un événement, on peut :

_ dénombrer le nombre de possibilités (dans le cas d'équiprobabilité)

_ exprimer l'événement à l'aide de réunion ou d'intersection d'événements élémentaires (pile, face, …)

_ utiliser la formule des probabilités totales lors d'une expérience à plusieurs étapes

2. Variables aléatoires discrètes

Soit X une V.A.R., avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$

Loi de X : Ensemble des $P(X = x_i)$, pour $i \in I$ (ou $P(X = k)$, $k \in X(\Omega)$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$).

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire X :
_ bien repérer dans l'énoncé la définition de X ("X est le nombre de …")
_ déterminer $X(\Omega)$
_ Pour chaque $i \in I$, déterminer $(X = x_i)$ puis $P(X = x_i)$, de manière individuelle s'il y a peu de valeurs ou par une formule. Dans le cas où il y a peu de valeurs, on présentera les résultats sous forme d'un tableau.

Remarque :
La famille $(X = x_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de Ω.

On a donc : $\displaystyle\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$.

Exemples :
1) On lance 3 fois une pièce équilibrée. On appelle "inversion" un pile suivi d'un face ou un face suivi d'un pile. Soit X le nombre d'inversions. Déterminer la loi de X.

$X(\Omega) = \{0,1,2\}$ $(X=0) = PPP \cup FFF$ $P(X = 0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$(X = 1) = PFF \cup PPF \cup FPP \cup FFP$ $P(X = 1) = \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$ $(X = 2) = PFP \cup FPF$ $P(X = 2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

k	0	1	2
$P(X= k)$	1/4	2/4	1/4

2) On considère une pièce dont la probabilité de faire pile est $p \in]0;1[$.
On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. Soit X le nombre de faces obtenus.
Déterminer la loi de X.

$X(\Omega) = \{0,1,2, ..\} = \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N}, (X = k) = F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1}$
Par indépendance, $P(X = k) = q^k p$ (avec $q = 1 - p$)

Espérance : Si la somme est finie ou si la série est absolument convergente, X admet une espérance,

et $E(X) = \sum_{i \in I} x_i \times P(X = x_i)$

Théorème de transfert : Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si la somme est finie ou si la série est absolument convergente, Y = g(X) admet une espérance et :

$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) \times P(X = x_i)$

Variance / Ecart-type : Si existence, $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Formule de Huygens : Si existence, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Transformation affine : Si existence, $E(aX + b) = aE(X) + b \quad V(aX + b) = a^2V(X)$.

Exemples :

1) Reprenons le premier exemple :

k	0	1	2
P(X= k)	1/4	2/4	1/4

Calculer l'espérance et la variance de X.

$X(\Omega)$ est fini, donc X admet une espérance et une variance.

$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{2}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. $\quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$.

2) Reprenons le deuxième exemple de la première page :

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = q^kp$.

Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

$\sum_{k \in \mathbb{N}} kP(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} kq^kp = pq \sum_{k \in \mathbb{N}} k\,q^{k-1}$

$-1 < q < 1$ donc la série converge absolument. Donc X admet une espérance et

$E(X) = pq \sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = pq \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p}$.

Lois usuelles

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme $\mathcal{U}([[1;n]])$	Equiprobabilité	$\{1, \ldots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	succès de proba p X = 1 si succès X = 0 sinon	$\{0,1\}$	$P(X= 0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	n épreuves **indépendantes** X = nbre de **succès**	$\{0, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$		$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	épreuves **indépendantes** X = **premier succès**	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Exemples :

1) On lance dix fois un dé équilibré. Soit X le nombre de 4 obtenus. Loi de X ? E(X) ? V(X) ?

Il y a dix lancers indépendants. Probabilité de faire 4 = $\frac{1}{6}$.

X compte le nombre de 4 obtenus. Donc $X \longrightarrow B(10, 1/6)$.

$E(X) = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$ $\quad$ $V(X) = 10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{18}$

2) On lance un dé jusqu'à faire 4. Soit X le nombre de lancers nécessaires. Loi de X ? E(X) ? V(X) ?

Les lancers sont indépendants. X est le rang du premier 4 obtenu. Donc $X \longrightarrow G(1/6)$.

$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6 \quad V(X) = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5}{6} \times 36 = 30$