

## 1. Généralités

Rappels : Soit A un événement

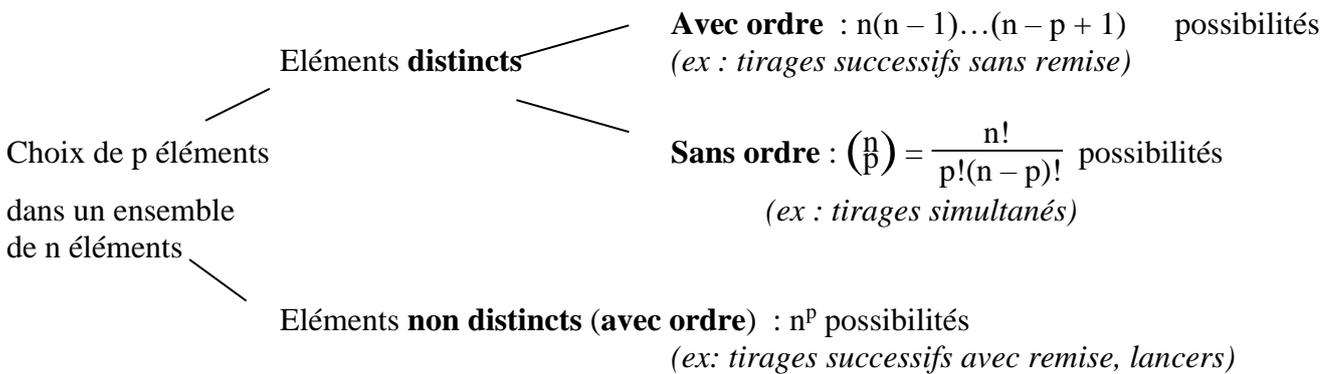
\_ A est un **événement**, c'est-à-dire un ensemble. Opérations possibles :  $\overline{A}$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$

\_  $\text{card}(A)$  est un **nombre entier**. Opérations possibles : +, -, ×, /

\_  $P(A)$  est un **nombre réel entre 0 et 1**. Opérations possibles : +, -, ×, /

Pas d'égalités entre deux éléments de nature différente !

### 1. Dénombrements / Probabilités



Exemples :

On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10.

1) On tire 3 boules successivement et avec remise :

2) On tire 3 boules successivement et sans remise :

3) On tire 3 boules simultanément :

*Equiprobabilité* (probabilité uniforme) :  $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exemple :

Dans l'urne précédente, on tire trois boules successivement et avec remise.

Quelle est la probabilité que les trois boules soient distinctes ?

*Probabilité conditionnelle* : Soit A et B deux événements. Si  $P(A) \neq 0$ ,  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Attention : Ne pas confondre  $P(A \cap B)$  : probabilité d'avoir A et B

$P_A(B)$  : probabilité d'avoir B si on est dans la situation A.

*A et B indépendants*  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Si  $P(A) \neq 0$ , A et B indépendants  $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ .

## 2. Probabilité d'une réunion, d'une intersection

Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$  n événements.

\_  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \begin{cases} P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) & \text{si } A_1, \dots, A_n \text{ incompatibles} \\ \text{formule du crible} & \text{sinon} \end{cases}$

\_  $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \begin{cases} P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n) & \text{si } A_1, \dots, A_n \text{ indépendants} \\ P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) & \text{sinon (formule des probabilités composées)} \end{cases}$

Remarques :

\_ En particulier, si  $P(A) \neq 0$ , alors  $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

\_ si  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ ,  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$

Ex : On lance un dé jusqu'au premier 6.

Quelle est la probabilité d'avoir lancé 5 fois le dé ?

### *Probabilité d'une réunion infinie :*

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements.

Si les  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux à deux **incompatibles**, alors la série  $\sum P(A_n)$  converge et  $P(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

### 3. Formule des probabilités totales

Soit  $(A_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  une famille d'événements d'un univers  $\Omega$ .

On dit que la famille forme un système complet d'événements si :

\_ pour tout  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$

\_  $\bigcup_{i \in \{1, \dots, p\}} A_i = \Omega$

Remarques :

\_ Un S.C.E. peut être représenté par les branches d'un arbre.

\_ Si  $(A_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  forment un S.C.E.,  $\sum_{i=1}^p P(A_i) = 1$

Propriété : **Formule des probabilités totales** : Soit B un événement

Soit  $A_1, A_2, \dots, A_p$  un S.C.E de  $\Omega$ . tel que  $\forall i \in \{1, \dots, p\}, P(A_i) \neq 0$ .

$$\text{Alors } P(B) = \sum_{i=1}^p P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^p P_{A_i}(B)P(A_i)$$

Deux applications :

\_ Dans une expérience aléatoire à **deux étapes**, la FPT permet de calculer la probabilité liée à la **deuxième étape**.

\_ **Marches aléatoires** :

On considère un système qui peut avoir plusieurs états (en général 2, 3 ou 4). A chaque étape il passe d'un état à un autre de manière aléatoire.

En utilisant comme S.C.E. les états à l'étape n, on trouve les probabilités à l'étape n+1 en fonction des probabilités à l'étape n. (il reste ensuite à étudier des suites récurrentes).

Exemple :

Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire une boule dans cette urne, on note X le numéro inscrit, puis on lance X fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité de ne faire que des piles ?

Conclusion :

*Pour déterminer la probabilité d'un événement, on peut :*

\_ *dénombrer le nombre de possibilités (dans le cas d'équiprobabilité)*

\_ *exprimer l'événement à l'aide de réunion ou d'intersection d'événements élémentaires (pile, face, ...)*

\_ *utiliser la formule des probabilités totales lors d'une expérience à plusieurs étapes*

## 2. Variables aléatoires discrètes

Soit  $X$  une V.A.R., avec  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$

**Loi de  $X$**  : Ensemble des  $P(X = x_i)$ , pour  $i \in I$  (ou  $P(X = k)$ ,  $k \in X(\Omega)$  si  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ).

### Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire $X$ :

\_ bien repérer dans l'énoncé la définition de  $X$  (" $X$  est le nombre de ...")

\_ déterminer  $X(\Omega)$

\_ Pour chaque  $i \in I$ , déterminer  $(X = x_i)$  puis  $P(X = x_i)$ , de manière individuelle s'il y a peu de valeurs ou par une formule. Dans le cas où il y a peu de valeurs, on présentera les résultats sous forme d'un tableau.

Remarque :

La famille  $(X = x_i)_{i \in I}$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .

On a donc : 
$$\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1.$$

Exemples :

1) On lance 3 fois une pièce équilibrée. On appelle "inversion" un pile suivi d'un face ou un face suivi d'un pile. Soit  $X$  le nombre d'inversions. Déterminer la loi de  $X$ .

2) On considère une pièce dont la probabilité de faire pile est  $p \in ]0;1[$ .  
On lance la pièce jusqu'à obtenir pile. Soit  $X$  le nombre de faces obtenus.  
Déterminer la loi de  $X$ .

**Espérance :** Si la somme est finie ou si la série est absolument convergente,  $X$  admet une espérance, et

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i \times P(X = x_i)$$

**Théorème de transfert :** Soit  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Si la somme est finie ou si la série est absolument convergente,  $Y = g(X)$  admet une espérance et :

$$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) \times P(X = x_i)$$

**Variance / Ecart-type :** Si existence,  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

**Formule de Huygens :** Si existence,  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

**Transformation affine :** Si existence,  $E(aX + b) = aE(X) + b$      $V(aX + b) = a^2V(X)$ .

Exemples :

1) Reprenons le premier exemple :

k	0	1	2
P(X= k)	1/4	2/4	1/4

Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

2) Reprenons le deuxième exemple de la première page :

$X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $P(X = k) = q^k p$ .

Montrer que  $X$  admet une espérance et la déterminer.

## Lois usuelles

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme $\mathcal{U}([1;n])$					
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$					
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$					
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$					
Géométrique $\mathcal{G}(p)$					

Exemples :

1) On lance dix fois un dé équilibré. Soit  $X$  le nombre de 4 obtenus. Loi de  $X$  ?  $E(X)$  ?  $V(X)$  ?

2) On lance un dé jusqu'à faire 4. Soit  $X$  le nombre de lancers nécessaires. Loi de  $X$  ?  $E(X)$  ?  $V(X)$  ?