Chapitre 4 : Les séries numériques

1. Convergence d'une série numérique

1.1 Série convergente

Définition :

Soit (u_n) une suite et $\sum_{n \geq 0} u_n$ la série de terme général u_n.

Soit $\mathbf{S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n}$ la **somme partielle** de la série.

Si **la somme partielle S_N converge**, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge**, sinon on dit qu'elle diverge.

Si la série converge, on peut définir la somme de la série, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, définie par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} u_n \right)$$

A retenir : Une série converge si et seulement si sa somme partielle converge

Remarques :

_ $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_{N+1} = S_N + u_{N+1}$.
_ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, alors (S_N) est croissante.
_ Le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne peut être utilisé que si on a montré avant que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente (c'est-à-dire si la suite $\sum_{n=0}^{N} u_n$ admet une limite réelle).
_ pensez aux sommes télescopiques !
_ en Python, si u est une liste qui contient $(u_0, u_1, \dots, u_N)$, alors `numpy.cumsum(u)` contient les premiers termes de la somme partielle.

Exemple :

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$. Déterminer la somme partielle (S_N).

La série est-elle convergente ? Si oui, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$.

Soit $N \geq 1$. $S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{N+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+1}}$

$\lim_{N \to +\infty} S_N = 1$ donc la série converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$.

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors u_n tend vers 0.

Remarques :

_ Si (u_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ ne converge pas. (on parle de divergence grossière)

_ Attention (u_n) peut tendre vers 0 sans que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge !

Ex : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Propriété :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$.

_ Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent, alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge et

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.}$$

_ Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n)$ converge et $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)}$.

1.2 Séries absolument convergentes

Définition :

Soit (u_n) une suite.

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente** si $\boldsymbol{\sum_{n \geq 0} |u_n|}$ **est convergente**.

Propriété (admise) :

Toute série **absolument convergente** est **convergente**.

Remarques :

_ Attention, la réciproque n'est pas vraie.

Exemple : On peut montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente

_ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \geq 0}$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente** $\Leftrightarrow$ $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **convergente**

2. Séries de référence

2.1 Série géométrique et séries associées

Propriété :

Soit $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$.

Alors les séries $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent (et convergent absolument) si et seulement si **$-1 < q < 1$**

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ $\displaystyle\sum_{n=1 \text{ (ou } 0)}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ $\displaystyle\sum_{n=2 \text{ (ou } 0 \text{ ou } 1)}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

Remarques : _ astuce : $n^2 = n(n-1) + n$

_ Pensez à changer d'indice, surtout dans le cas $\sum_{n \geq 1} q^{n-1}$ ($n' = n - 1$)

Exemples :

1) Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$?

Avec $n' = n - 1$: $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n' \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{n'}$ $-1 < \frac{2}{3} < 1$ la série converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$

2) Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$? $n^2 = n(n-1) + n$

Donc $\displaystyle\frac{n^2}{2^n} = n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\sum_{n \geq 0} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ convergent donc $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ converge

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2 \times 8}{4} + \frac{4}{2} = 6$

2.2 Série exponentielle

Propriété (admise)

$\forall x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exemple : Etudier la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$

$\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n = 0}^{+\infty} \frac{1^n}{n!} = e^1 = e$.

2.3 Séries de Riemann

Propriété :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ **converge** si et seulement si $\boldsymbol{\alpha > 1}$.

Remarque : Attention à ne jamais faire commencer cette somme à n = 0 !

Exemples : 1) Série harmonique : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^1}$ donc la série diverge.

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ 2 > 1 donc la série converge.

3. Séries à termes positifs

Remarque :
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.
Soit $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.
Comme $u_n \geq 0$, on a vu que (S_N) est croissante.
Donc, soit (S_N) converge (donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge), soit (S_N) tend vers $+\infty$.

Propriété :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \geq 0}$ et $\boldsymbol{v_n \geq 0}$.
(1) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n \leq v_n}$

Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ **est convergente** alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ **est convergente** et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ **est divergente** alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ **est divergente**.

2) On suppose que : $\boldsymbol{u_n =_{+\infty} o(v_n)}$.

Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ **est convergente** alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ **est convergente**.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ **est divergente** alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ **est divergente**.

3) On suppose que $\boldsymbol{u_n \sim_{+\infty} v_n}$

$\sum_{n \geq 0} u_n$ **est convergente si et seulement si** $\sum_{n \geq 0} v_n$ **est convergente**.

Démonstration du 1) :
Posons $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ et $T_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$, on a : $\sum_{n=0}^{N} u_n \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$
$S_N \leq T_N$.
Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente alors (T_N) est convergente.

Comme $v_n \geq 0$, (T_N) est croissante. Donc (T_N) est majorée par sa limite L.
Donc $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N \leq T_N \leq L$.

(S_N) est croissante (car $u_n \geq 0$) et majorée par L, donc (S_N) converge. Donc $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge.

D'après le théorème de comparaison, on a : $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N \leq \lim\limits_{N \to +\infty} T_N$. Donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

La deuxième partie est la contraposée.

Remarques :

_ attention à vérifier que **les séries sont à termes positifs** !

_ pour montrer que $\sum u_n$ est convergente, on peut essayer :

- _ utiliser une inégalité
- _ trouver un équivalent plus simple
- _ montrer que $u_n =_{+\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (par exemple), puis utiliser les séries de Riemann.

Exemples :

_ La série $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{n+1}{n^4+2}$ est-elle convergente ? $\frac{n+1}{n^4+2} \sim_{+\infty} \frac{n}{n^4} \sim_{+\infty} \frac{1}{n^3}$ (et les séries sont à termes positifs)

$\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann et 3 > 1) donc $\sum\limits_{n \geq 0} \frac{n+1}{n^4+2}$ converge.

_ La série $\sum\limits_{n \geq 0} n.e^{-n}$ est-elle convergente ?

$\frac{ne^{-n}}{\frac{1}{n^2}} = n^3e^{-n} = \frac{n^3}{e^n}$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3}{e^n} = 0$ (croissances comparées) donc $n.e^{-n} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$ne^{-n} \geq 0$, $\frac{1}{n^2} \geq 0$ et $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (2 > 1) donc $\sum\limits_{n \geq 0} ne^{-n}$ converge.