

Exercice 1

1) Pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$ $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$

$k-1 \leq k \leq k+1$ donc $(0 <) k(k-1) \leq k^2 \leq k(k+1)$

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc $\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

2) Donc pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$

Par sommes télescopiques : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n - \frac{1}{1^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$ donc $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

3) Pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ donc (S_n) est croissante.

$\forall n \geq 2$, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ donc (S_n) est majorée par 2. Donc (S_n) converge vers un réel S .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$ donc par passage à la limite dans l'inégalité : $\frac{3}{2} \leq S \leq 2$

4) Soit $N \geq n+1$. On a : $\sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$

Par sommes télescopiques : $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$

Par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent : $\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$.

Or $S - S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Donc $\frac{1}{n+1} \leq S - S_n \leq \frac{1}{n}$.

Remarque :

On avait $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et $\frac{3}{2} \leq S \leq 2$, mais on ne peut évidemment pas soustraire deux inégalités !

5) $\forall n \geq 1$ $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq S - S_n \leq \frac{1}{n}$, donc $|S - S_n| \leq \frac{1}{n}$.

Pour que S_n soit une valeur approchée de S à 10^{-7} près, il suffit que $\frac{1}{n} \leq 10^{-7} \Leftrightarrow n \geq 10^7$.

D'où le programme suivant :

```
s=0
for k in range(1,10**7+1):
    s=s+1/k**2
print(s)
```

Exercice 2

$$1) a) \forall N \in \mathbb{N}, T_{N+1} - T_N = S_{2N+2} - S_{2N} = \sum_{n=0}^{2N+2} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n a_n = (-1)^{2N+1} a_{2N+1} + (-1)^{2N+2} a_{2N+2}$$

$$= -a_{2N+1} + a_{2N+2}.$$

Comme la suite (a_n) est décroissante $a_{2N+2} \leq a_{2N+1}$ $a_{2N+2} - a_{2N+1} \leq 0$. Donc (T_N) est décroissante.

$$\text{De même, } U_{N+1} - U_N = S_{2N+3} - S_{2N+1} = (-1)^{2N+2} a_{2N+2} + (-1)^{2N+3} a_{2N+3} = a_{2N+2} - a_{2N+3} \geq 0$$

Donc (U_N) est croissante.

$$\text{Enfin } \forall N \in \mathbb{N}, U_N - T_N = S_{2N+1} - S_{2N} = (-1)^{2N+1} a_{2N+1} = -a_{2N+1}.$$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N = 0$. Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} (U_N - T_N) = 0$. Donc les suites sont adjacentes.

b) Donc les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent vers la même limite. Donc la suite (S_N) converge.

Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ converge.

2) a) Posons $a_n = \frac{1}{n} \forall n \geq 1$. La suite est positive, décroissante et tend vers 0. D'après la question 1), la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge.}$$

b) $\forall n \geq 1, \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ (série harmonique) diverge. Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ne converge pas absolument.

Exercice 3

$$1) S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{0} x^{k-0} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ (car } -1 < x < 1)$$

$$2) S_r(x) + xS_{r+1}(x) = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} + x \sum_{k=r+1}^{+\infty} \binom{k}{r+1} x^{k-(r+1)} = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \binom{k}{r+1} x^{k-r}$$

$$= \binom{r}{r} x^0 + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \binom{k}{r+1} x^{k-r} = 1 + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \left(\binom{k}{r} + \binom{k}{r+1} \right) x^{k-r}$$

$$= 1 + \sum_{k=r+1}^{+\infty} \binom{k+1}{r+1} x^{k-r} = 1 + \sum_{k'=r+2}^{+\infty} \binom{k'}{r+1} x^{k'-1-r} \text{ (} k' = k+1 \text{)}$$

$$\text{Et } S_{k+1}(x) = \sum_{k=r+1}^{+\infty} \binom{k}{r+1} x^{k-(r+1)} = \binom{r+1}{r+1} x^0 + \sum_{k=r+2}^{+\infty} \binom{k}{r+1} x^{k-1-r} \text{ donc } S_r(x) + xS_{r+1}(x) = S_{r+1}(x)$$

$$3) \text{ Donc } S_{r+1}(x) = \frac{S_r(x)}{1-x} \text{ suite géométrique de raison } \frac{1}{1-x}. \text{ Donc } S_r(x) = S_0(x) \times \frac{1}{(1-x)^r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$