Chapitre 4 - Les séries : Exercices niveau 2

Exercice 1

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a l'encadrement : $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$

3) Montrer que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite S.

4) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leq S - S_n \leq \frac{1}{n}$.

Aide :

_ peut-on soustraire deux inégalités ?

_ on pourra s'aider de $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$ *pour* $n \geq 1$ *et* $N \geq n+1$.

5) En déduire un programme Python qui permet de calculer une valeur approchée de S à 10^{-7} près.

Exercice 2 (Séries alternées)

Soit (a_n) une suite de réels. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, que la suite (a_n) est décroissante et que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

On considère la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ et $\forall N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $T_N = S_{2N}$ et $U_N = S_{2N+1}$.

1) a) Montrer que les suites $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(U_N)_{N \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) En déduire que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ est convergente.

2) a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

b) Montr
er que cette série n'est pas absolument convergente.

Exercice 3 (Formule du binôme négatif)

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.

On admet que $\forall r \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k \geq r} \binom{k}{r} x^{k-r}$ converge.

Pour $r \in \mathbb{N}$, on note $S_r(x) = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$.

1) Déterminer $S_0(x)$.

2) Pour tout $x \in]-1;1[$, pour tout $r \in \mathbb{N}$, montrer que $S_{r+1}(x) = S_r(x) + xS_{r+1}(x)$.

On rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p < n, \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

3) Que peut-on dire de la suite $(S_r)_{r \in \mathbb{N}}$? En déduire que $\forall r \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.