Chapitre 4 : Les séries numériques – Feuille n°1

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Pour tout $x \in]-1;1[$, calculer la valeur de la somme $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$

2) En déduire la valeur des sommes $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k.x^{k-1}$ et $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k.x^k$.

Exercice 2

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et pour $N \geq 1$, on note $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$.

1) En simplifiant l'expression $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, exprimer S_N en fonction de N.

2) Montrer que la série converge et déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Exercice 3

1) Montrer que $\forall n \geq 1,\ 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

2) On considère la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et pour $N \geq 1$, on note S_N la N-ème somme partielle.

a) Montrer que $\forall N \geq 1,\ S_N \geq 2\sqrt{N+1} - 2$.
b) La série est-elle convergente ?

Exercice 4

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 5
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer les sommes correspondantes.

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4^{n-1}}$ b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{4^n}$ c) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n(n-1)}{4^n}$ d) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{4^n}$ e) $\sum_{n \geq 2} \frac{4^n}{n!}$ f) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^{2n-1}}$ g) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n.2^n}{n!}$

Exercice 6
Etudier la nature des séries suivantes. (on ne demande pas la somme)

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ c) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

Exercice 7
Etudier la nature des séries suivantes. (on ne demande pas la somme)

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ (exercice 2) b) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{(2n+1)^3}$ c) $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$