# Chapitre 4 : Les séries numériques – Feuille n°2

**Exercice 1**

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{(\ln(n))^2}{n^3}$

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 u_n$. La série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ est-elle convergente ?

**Exercice 2**

Etudier la nature des séries suivantes. (on ne demande pas la somme)

a) $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n^2 e^{-2n}$ b) $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$

**Exercice 3**

Pour tout entier n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{1\times 4\times 7\times \ldots \times (3n-2)}{3^n \times n!} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(3k-2)}{3^n \times n!}.$$

1) Pour $n \geq 1$, calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \dfrac{1}{3n}$.

2) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n$ ?

**Exercice 4**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{3n+1}{3n} u_n$.

1) Montrer que tous les $u_n$ sont strictement positifs.

2) Montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{3n}$.

Etudier la nature de la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

3) Pour $N \geq 1$, on note $(S_N)$ la N-ème somme partielle de cette série.

a) Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} S_N$.

b) En déduire la limite de la suite $\ln(u_n)$ et enfin celle de la suite $(u_n)$.