

Chapitre 4 : Les séries numériques

1. Convergence d'une série numérique

1.1 Série convergente

Définition :

Soit (u_n) une suite et $\sum_{n \geq 0} u_n$ la série de terme général u_n .

Soit $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ la **somme partielle** de la série.

Si la **somme partielle S_N converge**, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge**, sinon on dit qu'elle diverge.

Si la série converge, on peut définir la somme de la série, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, définie par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=0}^N u_n \right)$$

A retenir : Une série converge si et seulement si sa somme partielle converge

Remarques :

_ $\forall N \in \mathbb{N}, S_{N+1} = S_N + u_{N+1}$.

_ si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$, alors (S_N) est croissante.

_ Le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne peut être utilisé que si on a montré avant que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente (c'est-à-

dire si la suite $\sum_{n=0}^N u_n$ admet une limite réelle).

_ pensez aux sommes télescopiques !

_ en Python, si u est une liste qui contient (u_0, u_1, \dots, u_N) , alors `numpy.cumsum(u)` contient les premiers termes de la somme partielle.

Exemple :

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$. Déterminer la somme partielle (S_N) .

La série est-elle convergente ? Si oui, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$.

Propriété

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors u_n tend vers 0.

Remarques :

_ Si (u_n) ne tend pas vers 0, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ ne converge pas. (on parle de divergence grossière)

_ Attention (u_n) peut tendre vers 0 sans que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge !

Ex : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Propriété :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$.

_ Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent, alors $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

_ Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)$.

1.2 Séries absolument convergentes

Définition :

Soit (u_n) une suite.

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente** si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

Propriété (admise) :

Toute série **absolument convergente** est **convergente**.

Remarques :

_ Attention, la réciproque n'est pas vraie.

Exemple : On peut montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente

_ si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente** $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} u_n$ est **convergente**

2. Séries de référence

2.1 Série géométrique et séries associées

Propriété :

Soit $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$.

Alors les séries $\sum_{n \geq 0} q^n$, $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ convergent (et convergent absolument) si et seulement si

$-1 < q < 1$

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

Remarques : _ astuce : $n^2 = n(n-1) + n$

_ Pensez à changer d'indice, surtout dans le cas $\sum_{n \geq 1} q^{n-1}$ ($n' = n-1$)

Exemples :

1) Convergence et somme de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$?

2) Convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$?

2.2 Série exponentielle

Propriété (admise)

$\forall x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exemple : Etudier la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$

2.3 Séries de Riemann

Propriété :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque : Attention à ne jamais faire commencer cette somme à $n = 0$!

Exemples : 1) Série harmonique : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^1}$ donc la série diverge.

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ $2 > 1$ donc la série converge.

3. Séries à termes positifs

Remarque :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.Soit $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.Comme $u_n \geq 0$, on a vu que (S_N) est croissante.Donc, soit (S_N) converge (donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge), soit (S_N) tend vers $+\infty$.

Propriété :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$.(1) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente.

2) On suppose que : $u_n = o(v_n)$.

Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente.

3) On suppose que $u_n \sim_{+\infty} v_n$

$\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente.

Démonstration du 1) :

Posons $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ et $T_N = \sum_{n=0}^N v_n$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, on a : $\sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^N v_n$

 $S_N \leq T_N$.

Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ est convergente alors (T_N) est convergente.

Comme $v_n \geq 0$, (T_N) est croissante. Donc (T_N) est majorée par sa limite L .

Donc $\forall N \in \mathbb{N}, S_N \leq T_N \leq L$.

(S_N) est croissante (car $u_n \geq 0$) et majorée par L , donc (S_N) converge. Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

D'après la propriété de "passage à la limite", on a : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} T_N$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

La deuxième partie est la contraposée.

Remarques :

- _ attention à vérifier que **les séries sont à termes positifs !**
- _ pour montrer que $\sum u_n$ est convergente, on peut essayer :
 - _ utiliser une inégalité
 - _ trouver un équivalent plus simple
 - _ montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (par exemple), puis utiliser les séries de Riemann.

Exemples :

- _ La série $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{n^4+2}$ est-elle convergente ?

- _ La série $\sum_{n \geq 0} n.e^{-n}$ est-elle convergente ?