Chapitre 5 – Probabilités - Correction exercices niveau 2

Exercice 1

1) $A_n = F_1\dots F_n \cap P_1F_2\dots F_n \cap P_1P_2F_3\dots F_n \cap \dots P_1\dots P_{n-1}F_n \cap P_1\dots P_n$

Donc $P(A_n) = p^n + q\times p^{n-1} + q^2 \times p^{n-2} + \dots + q^n = \sum_{k=0}^{n} p^{n-k}q^k$ (n – k piles puis k faces)

2) $P(A_n) = p^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{q}{p}\right)^k = p^n \times \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}{1-\frac{q}{p}} = p^n \times \dfrac{\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p^{n+1}}}{\frac{p-q}{p}} = \dfrac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$

Exercice 2

1) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$ car $- P(A_1 \cap A_2) \leq 0$

2) Par recurrence sur n :

_ pour n = 1 : $P\left(\cup_{k=1}^{1} A_k\right) = P(A_1)$ $\sum_{k=1}^{1} P(A_k) = P(A_1)$ donc la propriété est vraie au rang 1.

_ supposons qu'à un rang n, $P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

$P\left(\cup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \leq P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) + P(A_{n+1})$ d'après la question 1

Or $P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$ donc $P\left(\cup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1})$

$P\left(\cup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k)$.

Donc $\forall n \geq 1$, $P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Exercice 3

1) $\text{card}(\Omega) = n^n$ (n possibilités pour chaque boule)

card(A) = n! (n choix pour la 1ère boule, n – 1 pour la 2ème, …) $p_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

2) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} < 1$ donc (p_n) décroissante. Comme (p_n) minorée par 0 (probabilité), on sait que (p_n) est convergente.

3) Pour $n \geq 2$ $n! = 2 \times .. \times n \leq n^{n-1}$ donc $0 \leq p_n \leq \dfrac{1}{n}$ par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Exercice 4

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$ donc $P(A_n) \leq P(A_{n+1})$ $p_n \leq p_{n+1}$

La suite (p_n) est croissante et majorée par 1 (car probabilité), donc converge.

2) a) Les (A_i) étant inclus les uns dans les autres, on a : $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = A_n$

b) $A_n = (A_n \cap A_{n-1}) \cup (A_n \cap \overline{A_{n-1}}) = A_{n-1} \cup B_n$ (union disjointe).

Donc $P(A_n) = P(A_{n-1}) + P(B_n)$ $P(B_n) = P(A_n) - P(A_{n-1}) = p_n - p_{n-1}$.

c) On voit que : $A_n = \bigcup_{i=0}^{n} B_i$ (qu'on peut démontrer par récurrence sur n)

d) $\forall n \geq 1$, $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{i=0}^{n} B_i$ donc $\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i$

$A = \bigcup_{i=0}^{+\infty} B_i$ et les (B_i) sont disjoints, donc $P(A) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(B_i)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} P(B_i) = P(B_0) + \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_{i-1}) = p_0 + p_n - p_0$ (par télescopage) $= p_n$

donc $P(A) = \lim_{n \to +\infty} p_n$.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} \subset C_n$ donc $\overline{C_n} \subset \overline{C_{n+1}}$ $\quad A_n \subset A_{n+1}$

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\overline{\bigcap_{i=0}^{n} C_i} = \bigcup_{i=0}^{n} \overline{C_i} = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ donc $\overline{\bigcap_{i=0}^{+\infty} C_i} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$

D'après la question 2, la suite $(P(A_n))$ converge (donc $P(C_n) = 1 - P(A_n)$ aussi), et :

$P\left(\overline{\bigcap_{i=0}^{+\infty} C_i}\right) = P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 1 - \lim_{n \to +\infty} P(C_n)$

Donc $P\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} C_i\right) = 1 - \left(1 - \lim_{n \to +\infty} P(C_n)\right) = \lim_{n \to +\infty} P(C_n)$