

Chapitre 5 : Probabilités – Feuille n°2

Exercice 1

On considère un dé équilibré et une urne qui contient au départ une boule blanche et une boule noire. On lance le dé :

- _ si on obtient 1 : on ne change pas les boules
- _ si on obtient 2 : on remplace les deux boules par deux boules noires
- _ si on obtient 3 : on remplace les deux boules par deux boules blanches
- _ si on obtient 4 : on prend une boule blanche (s'il y en a une), et on la remplace par une noire
- _ si on obtient 5 : on prend une boule noire (s'il y en a une), et on la remplace par une blanche
- _ si on obtient 6 : s'il y a deux boules de la même couleur, on les remplace par deux boules de l'autre couleur.

On répète ce procédé indéfiniment. (il y a donc toujours deux boules dans l'urne)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après n étapes.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X_{n+1} = 0)$, $P(X_{n+1} = 1)$ et $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

Exercice 2

On considère la situation de l'exercice 4 feuille 1 : Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. Chaque boule tirée est repeinte de l'autre couleur et remise dans l'urne.

On reproduit plusieurs fois ce processus.

Pour $n \geq 1$, on appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges dans l'urne après n tirages (et n replacements).

1) Montrer que $\forall n \geq 1$, $P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{5} P(X_n = 1)$ et $P(X_{n+1} = 5) = \frac{1}{5} P(X_n = 4)$.

2) Soit $i \in \{1, \dots, 4\}$. Montrer que $\forall n \geq 1$,

$$P(X_{n+1} = i) = \frac{6-i}{5} P(X_n = i-1) + \frac{i+1}{5} P(X_n = i+1)$$