Chapitre 5 : Probabilités - Généralités

1. Dénombrement

Choix de p éléments dans un ensemble de n éléments

- Eléments **distincts**
  - **Avec ordre** : $\mathbf{n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$ possibilités *(tirages successifs sans remise)*
  - **Sans ordre :** $\mathbf{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$ possibilités *(tirages simultanés)*
- Eléments **non distincts** (**avec ordre**) : $\mathbf{n^p}$ possibilités *(tirages successifs avec remise ou lancers d'un dé, d'une pièce, …)*

Remarque : Pour dénombrer, pensez à faire des listes, des schémas, des tableaux, …

Ex :
1) On lance trois fois un dé. Combien de résultats possibles ?

6^3 possibilités

2) On tire 3 cartes dans un jeu de cartes de 32 cartes. Combien de résultats possibles ?

$\binom{32}{3} = \dfrac{32 \times 31 \times 30}{3 \times 2} = 4960$ possibilités

3) Dans une urne qui contient 10 boules, on tire 3 boules successivement et sans remise. Combien de résultats possibles ?

$10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilités.

2. Définition et propriétés d'une probabilité

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. (Rappel : Ω est l'univers, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des événements)
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
1) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$
2) $\mathbf{P(\Omega) = 1}$
3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ **deux à deux incompatibles**, alors :

$$\sum P(A_n) \text{ converge et } \mathbf{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)}$$

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{A}$, et $B \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{A}$,
_ $P(\emptyset) = 0$
_ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
_ Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
_ si A et B incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
_ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
_ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Définition : Soit $A \in \mathcal{A}$.

Si **P(A) = 0** on dit que A est un **ensemble négligeable**.
Si P(A) = 1 on dit que A est **presque sûr**.

Remarques :

_ Probabilité uniforme (équiprobabilité) : $\mathbf{P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{nb\ de\ cas\ favorables}{nb\ de\ possibilités\ en\ tout}}$

(Attention : toujours commencer par calculer $card(\Omega)$!)

_ ne pas confondre : A : événement (opérations : $\cap$, $\cup$, $\overline{A}$)
card(A) : entier naturel (opérations : +, - , ×, /)
P(A) : réel entre 0 et 1 (opérations : +, - , ×, /)

_ il faut toujours décrire l'événement avant de trouver sa probabilité ! (par une décomposition en éléments simples, par une liste, par une phrase…).

Exemples :

1) On lance 3 fois un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres différents ?

Equiprobabilité : $card(\Omega) = 6 \times 6 \times 6 = 6^3$

$card(A) = 6 \times 5 \times 4$ donc $P(A) = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = \dfrac{5}{3 \times 3} = \dfrac{5}{9}$.

2) On lance un dé indéfiniment.

a) Pour $i \in \mathbb{N}$, notons A_{2i+1} = "le premier six arrive au 2i+1 lancer". Déterminer $P(A_{2i+1})$.

b) Soit A = "il faut un nombre impair de lancers pour faire un premier 6". Déterminer P(A).

$P(A_{2i+1}) = P(\overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{2i}} \cap S_{2i+1}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{2i}\dfrac{1}{6}$ (lancers indépendants)

A = "on obtient un premier six au 1er lancer ou au 3ème lancer ou…" $= A_1 \cup A_3 \cup \ldots$

$= \cup_{i=0}^{+\infty} A_{2i+1}$ (incompatibles)

donc $P(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(A_{2i+1}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2i}\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{i} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11}$

3. Probabilités conditionnelles et applications

3.1 Probabilités conditionnelles

Définition :

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$ et B un événement.

On appelle probabilité de B sachant A le nombre : $\mathbf{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

Remarques :

_ on peut montrer qu'une probabilité conditionnelle est en particulier une probabilité, donc en a toutes les propriétés

_ ne pas confondre :

_ $P(A \cap B)$: probabilité d'avoir A et B

_ $P_A(B)$: probabilité d'avoir B si on est dans la situation A.

En général, l'énoncé se traduit par $P_A(B)$! **Phrase avec "Si" $\Rightarrow$ probabilité conditionnelle**

Propriété (**Formule des probabilités composées**)

_ Soient A_1 et A_2 deux événements.

Si $P(A_1) \neq 0$, alors $\mathbf{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)}$

_ Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ n événements telle que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors $\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}$

Définition :

Soit A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

Remarques :

_ si $P(A) \neq 0$, on a : **A et B indépendants** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{P_A(B) = P(B)}$

_ si $\mathbf{A_1, \ldots, A_n}$ **indépendants**, $\mathbf{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times \ldots \times P(A_n)}$

_ si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$ (**Formule de Bayes**, "probabilité des causes")

Résumé :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements.

_ $\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)} = \begin{cases} P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \text{ si } A_1, \ldots, A_n \textbf{ incompatibles} \\ \text{formule du crible sinon} \end{cases}$

_ $\mathbf{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)} =$

$$\begin{cases} P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \text{ si } A_1, \ldots, A_n \textbf{ indépendants} \\ P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n) \text{ sinon (formule des probabilités composées)} \end{cases}$$

3.2 Formule des probabilités totales

Définition :

Soit $I \subset \mathbb{N}$. (I fini ou infini) Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements d'un univers Ω.
On dit que la famille forme un système complet d'événements si :
_ pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ *(événements deux à deux incompatibles)*
_ $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Remarques :
_ Un S.C.E. peut être représenté par les branches d'un arbre.

_ si $(A_i)_{i \in I}$ forment un S.C.E., on a $\sum_{i \in I} P(A_i) = 1$ (si I est infini, la série converge)

Propriété : **Formule des probabilités totales**

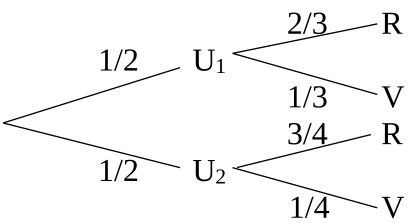
Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements et B un événement.

Alors (si I est infini les séries $\sum P(A_i)P_{A_i}(B)$ et $\sum P(A_i \cap B)$ convergent et)

$$\mathbf{P(B)} = \sum_{i \in I} \mathbf{P(A_i \cap B)}$$
$$= \sum_{i \in I} \mathbf{P(A_i)P_{A_i}(B)} \quad (\text{si } \forall i \in I, P(A_i) \neq 0)$$

Remarques :
_ Dans une expérience aléatoire à deux étapes, la FPT permet de calculer les **probabilités liées à la deuxième étape** (en prenant comme SCE les résultats de la première étape).
_ Applications aux marches aléatoires : voir paragraphe suivant

Ex : Une urne U_1 contient 2 boules rouges et 1 boule verte
Une urne U_2 contient 3 boules rouges et 1 boule verte.
On choisit une urne au hasard, puis une boule dans cette urne.
Probabilité de tirer une boule rouge ?



(U_1, U_2) forment un S.C.E. . D'après la F.P.T. :
$P(R) = P(U_1)P_{U_1}(R) + P(U_2)P_{U_2}(R) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{24} + \frac{9}{24} = \frac{17}{24}$

3.3 Application aux marches aléatoires

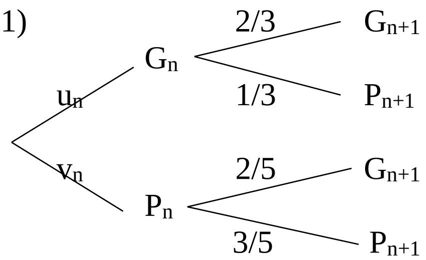
On considère un système qui peut avoir plusieurs états (en général 2, 3 ou 4).
A chaque étape il passe d'un état à un autre de manière aléatoire.

Méthode :

(Par exemple dans le cas de trois états possibles A, B, C) :
_ notons A_n = "le système est à l'état A après n étapes", idem pour B_n et C_n.
Posons $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$.
_ on prend comme **S.C.E. les événements à l'étape n** (A_n, B_n, C_n)
(**faire un arbre avec les rangs n et n+1**).
_ l'énoncé nous permet de trouver $P_A(A_{n+1})$, et les 8 autres probabilités conditionnelles
_ on applique la **formule des probabilités totales** pour A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1}.
_ on obtient des **formules de récurrence** du type : $\begin{cases} p_{n+1} = a.p_n + b.q_n + c.r_n \\ q_{n+1} = d.p_n + e.q_n + f.r_n \\ r_{n+1} = g.p_n + h.q_n + i.r_n \end{cases}$
(sans oublier que $\mathbf{p_n + q_n + r_n = 1}$)
_ pour trouver l'expression de p_n, q_n, r_n en fonction de n :
_ on reconnaît des **suites usuelles** (géométriques, …)
_ on utilise les matrices : voir chapitre "Chaines de Markov"

Exemple :
Un joueur de tennis joue un grand nombre de matchs.
Son premier match de la saison est gagné.
S'il gagne un match, la probabilité qu'il gagne le suivant est 2/3, s'il le perd, la probabilité qu'il gagne le suivant est 2/5.
Pour $n \geq 1$, on note G_n : "il gagne le n-ème match de la saison" et P_n = "il perd le n-ème match"
On pose également : $u_n = P(G_n)$ $v_n = P(P_n)$
1) Pour $n \geq 1$, exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4}{15} u_n + \frac{2}{5}$.
3) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

1)



(G_n, P_n) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :
$P(G_{n+1}) = P(G_n)P_{G_n}(G_{n+1}) + P(P_n)P_{P_n}(G_{n+1})$ $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{2}{5} v_n$ De même, $v_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{3}{5} v_n$.

2) $\forall n \geq 1$, $v_n = 1 - u_n$ donc $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + \frac{2}{5}(1 - u_n) = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)u_n + \frac{2}{5} = \frac{4}{15} u_n + \frac{2}{5}$

3) (u_n) est une suite arithémético-géométrique.

Point fixe : $c = \frac{4}{15} c + \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{11}{15} c = \frac{2}{5} \Leftrightarrow c = \frac{15}{11} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{11}$.

Donc $w_n = u_n - \frac{6}{11}$ est géométrique de raison $\frac{4}{15}$. $w_n = \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} w_1$, avec $w_1 = u_1 - \frac{6}{11} = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$

(le premier match est gagné)

$u_n - \frac{6}{11} = \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} \frac{5}{11}$ $\quad u_n = \frac{6}{11} + \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} \frac{5}{11}$

$v_n = 1 - u_n = 1 - \left(\frac{6}{11} + \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} \frac{5}{11}\right) = \frac{5}{11} - \left(\frac{4}{15}\right)^{n-1} \frac{5}{11}$

Remarque : Il est parfois plus simple de décrire l'événement par une phrase qu'à l'aide d'un arbre.
(par exemple, quand il y a un grand nombre d'états possibles)

Ex : Un joueur jette plusieurs fois une pièce équilibrée.
Il commence avec un gain de 0 euros. Son gain pourra être positif ou négatif.
Quand il obtient un pile, son gain augmente d'un euro. S'il obtient un face, son gain diminue d'un euro.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur après n lancers (en euros).
Montrer que $\forall i \in \{-n - 1, \dots, n + 1\}$, $P(X_{n+1} = i) = \frac{1}{2} P(X_n = i - 1) + \frac{1}{2} P(X_n = i + 1)$.

$(X_{n+1} = i)$ = "Soit au bout de n lancers, il y a un gain de i – 1 euros, puis il fait pile, soit au bout de n lancers, il y a un grain de i + 1 euros, puis il fait face"
$= ((X_n = i - 1) \cap P_{i+1}) \cup ((X_n = i + 1) \cap F_{i+1})$.
Par incompatibilité et indépendance, $P(X_{n+1} = i) = P(X_n = i - 1) \times \frac{1}{2} + P(X_n = i + 1) \times \frac{1}{2}$.

Conclusion :

Pour déterminer la probabilité d'un événement, on peut :

_ dénombrer le nombre de possibilités (dans le cas d'équiprobabilité)

_ exprimer l'événement à l'aide de réunion ou d'intersection d'événements élémentaires (pile, face, …)

_ utiliser la formule des probabilités totales lors d'une expérience à plusieurs étapes