Chapitre 5 : Probabilités - Généralités

1. Dénombrement

Choix de p éléments dans un ensemble de n éléments

- Eléments **distincts**
  - **Avec ordre** : $\mathbf{n(n-1)\ldots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$ possibilités *(tirages successifs sans remise)*
  - **Sans ordre :** $\mathbf{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$ possibilités *(tirages simultanés)*
- Eléments **non distincts** (**avec ordre**) : $\mathbf{n^p}$ possibilités *(tirages successifs avec remise ou lancers d'un dé, d'une pièce, …)*

Remarque : Pour dénombrer, pensez à faire des listes, des schémas, des tableaux, …

Ex :

1) On lance trois fois un dé. Combien de résultats possibles ?

2) On tire 3 cartes dans un jeu de cartes de 32 cartes. Combien de résultats possibles ?

3) Dans une urne qui contient 10 boules, on tire 3 boules successivement et sans remise. Combien de résultats possibles ?

2. Définition et propriétés d'une probabilité

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. (Rappel : Ω est l'univers, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des événements)

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall\ A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

2) $\mathbf{P(\Omega) = 1}$

3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ **deux à deux incompatibles**, alors :

$$\sum P(A_n) \text{ converge et } \mathbf{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)}$$

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{A}$, et $B \in \mathcal{A}$, $C \in \mathcal{A}$,
_ $P(\emptyset) = 0$
_ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
_ Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
_ si A et B incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
_ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
_ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Définition : Soit $A \in \mathcal{A}$.

Si $P(A) = 0$ on dit que A est un **ensemble négligeable**.
Si $P(A) = 1$ on dit que A est **presque sûr**.

Remarques :
_ Probabilité uniforme (équiprobabilité) : $\mathbf{P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{nb\ de\ cas\ favorables}{nb\ de\ \ possibilités\ en\ tout}}$
(Attention : toujours commencer par calculer card(Ω) !)
_ ne pas confondre : A : événement (opérations : $\cap$, $\cup$, $\overline{A}$)
card(A) : entier naturel (opérations : +, - , ×, /)
P(A) : réel entre 0 et 1 (opérations : +, - , ×, /)
_ il faut toujours décrire l'événement avant de trouver sa probabilité ! (par une décomposition en éléments simples, par une liste, par une phrase…).

Exemples :
1) On lance 3 fois un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres différents ?

2) On lance un dé indéfiniment.
a) Pour $i \in \mathbb{N}$, notons A_{2i+1} = "le premier six arrive au 2i+1 lancer". Déterminer $P(A_{2i+1})$.
b) Soit A = "il faut un nombre impair de lancers pour faire un premier 6". Déterminer P(A).

3. Probabilités conditionnelles et applications

3.1 Probabilités conditionnelles

Définition :

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$ et B un événement.

On appelle probabilité de B sachant A le nombre : $\mathbf{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

Remarques :

_ on peut montrer qu'une probabilité conditionnelle est en particulier une probabilité, donc en a toutes les propriétés

_ ne pas confondre :

_ $P(A \cap B)$: probabilité d'avoir A et B

_ $P_A(B)$: probabilité d'avoir B si on est dans la situation A.

En général, l'énoncé se traduit par $P_A(B)$! **Phrase avec "Si" $\Rightarrow$ probabilité conditionnelle**

Propriété (**Formule des probabilités composées**)

_ Soient A_1 et A_2 deux événements.

Si $P(A_1) \neq 0$, alors $\mathbf{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)}$

_ Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ n événements telle que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors $\mathbf{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}$

Définition :

Soit A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

Remarques :

_ si $P(A) \neq 0$, on a : **A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $P_A(B) = P(B)$**

_ si **$A_1, \ldots, A_n$ indépendants**, $\mathbf{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times \ldots \times P(A_n)}$

_ si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$ (**Formule de Bayes**, "probabilité des causes")

Résumé :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements.

_ $\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)} = \begin{cases} P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \text{ si } A_1, \ldots, A_n \textbf{ incompatibles} \\ \text{formule du crible sinon} \end{cases}$

_ $\mathbf{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)} =$
$$\begin{cases} P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n) \text{ si } A_1, \ldots, A_n \textbf{ indépendants} \\ P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n) \text{ sinon (formule des probabilités composées)} \end{cases}$$

3.2 Formule des probabilités totales

Définition :

Soit $I \subset \mathbb{N}$. (I fini ou infini) Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements d'un univers Ω.
On dit que la famille forme un système complet d'événements si :
_ pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ *(événements deux à deux incompatibles)*
_ $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$

Remarques :
_ Un S.C.E. peut être représenté par les branches d'un arbre.

_ si $(A_i)_{i \in I}$ forment un S.C.E., on a $\sum_{i \in I} P(A_i) = 1$ (si I est infini, la série converge)

Propriété : **Formule des probabilités totales**

Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements et B un événement.

Alors (si I est infini les séries $\sum P(A_i)P_{A_i}(B)$ et $\sum P(A_i \cap B)$ convergent et)

$$\mathbf{P(B)} = \sum_{i \in I} \mathbf{P(A_i \cap B)}$$
$$= \sum_{i \in I} \mathbf{P(A_i)P_{A_i}(B)} \quad (\text{si } \forall i \in I, P(A_i) \neq 0)$$

Remarques :
_ Dans une expérience aléatoire à deux étapes, la FPT permet de calculer les **probabilités liées à la deuxième étape** (en prenant comme SCE les résultats de la première étape).
_ Applications aux marches aléatoires : voir paragraphe suivant

Ex : Une urne U_1 contient 2 boules rouges et 1 boule verte
Une urne U_2 contient 3 boules rouges et 1 boule verte.
On choisit une urne au hasard, puis une boule dans cette urne.
Déterminer la probabilité de tirer une boule rouge.

3.3 Application aux marches aléatoires

On considère un système qui peut avoir plusieurs états (en général 2, 3 ou 4).
A chaque étape il passe d'un état à un autre de manière aléatoire.

Méthode :

(Par exemple dans le cas de trois états possibles A, B, C) :
_ notons A_n = "le système est à l'état A après n étapes", idem pour B_n et C_n.
Posons $p_n = P(A_n)$, $q_n = P(B_n)$, $r_n = P(C_n)$.
_ on prend comme **S.C.E. les événements à l'étape n** (A_n, B_n, C_n)
(**faire un arbre avec les rangs n et n+1**).
_ l'énoncé nous permet de trouver $P_A(A_{n+1})$, et les 8 autres probabilités conditionnelles
_ on applique la **formule des probabilités totales** pour A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1}.
_ on obtient des **formules de récurrence** du type : $\begin{cases} p_{n+1} = a.p_n + b.q_n + c.r_n \\ q_{n+1} = d.p_n + e.q_n + f.r_n; \\ r_{n+1} = g.p_n + h.q_n + i.r_n \end{cases}$
(sans oublier que $\mathbf{p_n + q_n + r_n = 1}$)
_ pour trouver l'expression de p_n, q_n, r_n en fonction de n :
_ on reconnaît des **suites usuelles** (géométriques, …)
_ on utilise les matrices : voir chapitre "Chaines de Markov"

Exemple :
Un joueur de tennis joue un grand nombre de matchs.
Son premier match de la saison est gagné.
S'il gagne un match, la probabilité qu'il gagne le suivant est 2/3, s'il le perd, la probabilité qu'il gagne le suivant est 2/5.
Pour $n \geq 1$, on note G_n : "il gagne le n-ème match de la saison" et P_n = "il perd le n-ème match"
On pose également : $u_n = P(G_n)$ $v_n = P(P_n)$
1) Pour $n \geq 1$, exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4}{15} u_n + \frac{2}{5}$.
3) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Remarque : Il est parfois plus simple de décrire l'événement par une phrase qu'à l'aide d'un arbre.
(par exemple, quand il y a un grand nombre d'états possibles)

Ex : Un joueur jette plusieurs fois une pièce équilibrée.
Il commence avec un gain de 0 euros. Son gain pourra être positif ou négatif.
Quand il obtient un pile, son gain augmente d'un euro. S'il obtient un face, son gain diminue d'un euro.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur après n lancers (en euros).
Montrer que $\forall i \in \{-n-1, \ldots, n+1\}$, $P(X_{n+1} = i) = \frac{1}{2} P(X_n = i-1) + \frac{1}{2} P(X_n = i+1)$.

Conclusion :

Pour déterminer la probabilité d'un événement, on peut :

_ dénombrer le nombre de possibilités (dans le cas d'équiprobabilité)

_ exprimer l'événement à l'aide de réunion ou d'intersection d'événements élémentaires (pile, face, …)

_ utiliser la formule des probabilités totales lors d'une expérience à plusieurs étapes