Chapitre 6 : Variables aléatoires discrètes

1. Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

1.1 Définition et loi

Définitions :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé.
Soit X une application de Ω dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note : $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \leq x\}$
Si pour tout réel x, $(X \leq x) \in \mathcal{A}$, on dit que X est une **variable aléatoire**.
De plus, si on peut écrire $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, où I est une partie de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, on dit que X est une **variable aléatoire discrète** (VARD)

Définition :

Soit X une V.A.R.D.
On appelle **loi de probabilité de X** la donnée de **$X(\Omega)$** et de **$P(X = x_i)$, pour tout $x_i \in X(\Omega)$**.

Propriété :

Soit X une V.A.R.D., avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
Alors la famille **$(X = x_i)_{i \in I}$** est un **système complet d'événements de Ω**.

En particulier, on a donc : $\displaystyle\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$.

Propriété :

Si X et Y sont des V.A.R. discrètes et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λX, $X + Y$, $\max(X,Y)$, $\min(X, Y)$, XY sont des V.A.R. discrètes.

Méthode :

Pour trouver la loi d'une VARD X :
_ identifier la définition de X : "X est le nombre de …"
_ déterminer $X(\Omega)$
_ pour $x \in X(\Omega)$, déterminer $(X = x)$ <u>puis</u> $P(X = x)$.
(Si $X(\Omega)$ est petit, on présente souvent le résultat dans un tableau)
_ on peut aussi reconnaitre une loi usuelle (voir paragraphe 2)

Exemples :
1) On lance 3 fois une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est 2/3.
On dit qu'un lancer est un changement s'il amène un résultat différent du précédent.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les 3 lancers.
Déterminer la loi de X.

$X(\Omega) = \{0,1,2\}$
$(X = 0) = PPP \cup FFF$ $\quad$ $(X = 1) = PPF \cup PFF \cup FFP \cup FPP$ $\quad$ $(X = 2) = PFP \cup FPF$
Par indépendance des lancers : $P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8+1}{27} = \frac{9}{27} = \frac{3}{9}$

$P(X = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$ $\qquad$ $P(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

i	0	1	2
P(X = i)	3/9	4/9	2/9

2) On considère une pièce truquée dont la probabilité de faire pile est $p \in$ $p \in]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
On lance la pièce, puis on relance la pièce jusqu'à obtenir un résultat différent du premier.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires en tout. Quelle est la loi de X ?

$X(\Omega) = \{2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\forall\, k \geq 2$, $(X = k) = (P_1 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap P_k)$
Donc, par incompatibilité et indépendance des lancers, $P(X = k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p$.

Propriété :

Soit I une partie de $\mathbb{N}$. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels distincts et soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille de réels.
Il existe une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $\forall\, i \in I$, $P(X = x_i) = p_i$ si et seulement si
$$\begin{cases} \boldsymbol{\forall\, i \in I,\ p_i \geq 0} \\ \boldsymbol{\sum\limits_{i \in I} p_i = 1} \end{cases}$$

On dit que la famille $(p_i)_{i \in I}$ définit une loi de probabilité.

Exemple :

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} \geq 0$.

$\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} p_n = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la série converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \times 2 = 1$.

Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

1.2 Fonction de répartition

Définition :

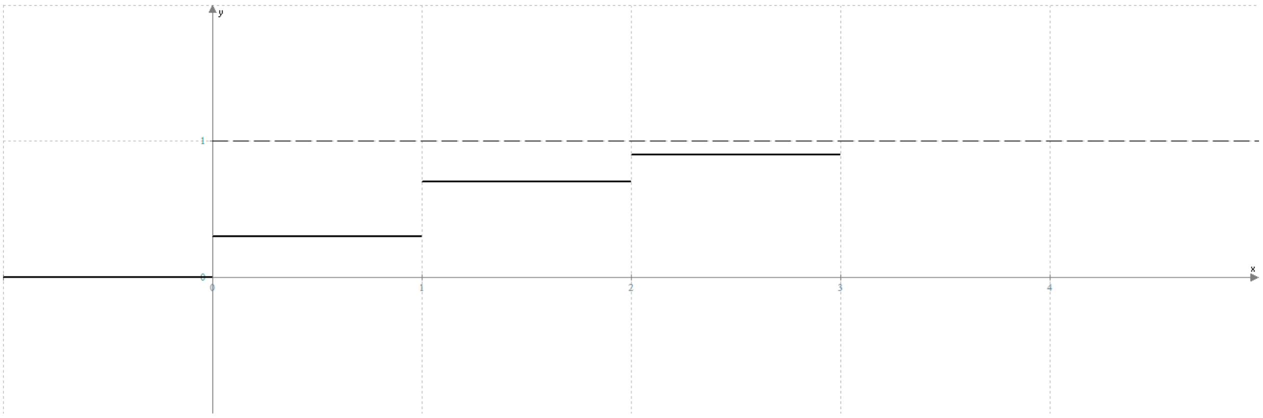
Soit X une VA.R.
On appelle fonction de répartition de X l'application : F_X définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{F_X(x) = P(X \leq x)}$

Propriétés de la fonction de répartition :

Soit X une V.A.R. et F_X sa fonction de répartition.
1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{0 \leq F_X(x) \leq 1}$
2) **F_X est croissante sur $\mathbb{R}$**
3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
4) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$, $\mathbf{P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)}$

1.3 Fonction de répartition d'une VAR discrète

Courbe :



Si X est une VARD, F_X est une fonction qui est constante par intervalle, n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Dans le cas d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on étudie plutôt $P(X \leq k)$, avec $k \in \mathbb{N}$, (ou $P(X > k)$, $P(X < k)$, $P(X \geq k)$.

IMPORTANT : Méthode :

Dans certaines situations, il est plus simple de chercher la fonction de répartition que la loi :
_ $(X \leq k)$: utile lorsque X est définie comme un **maximum**
Si X = maximum **$(X \leq k)$ = "tous sont $\leq k$"** (analogue avec $(X < k)$
_ $(X \geq k)$: utile lorsque X est définie comme un **minimum**.
Si X = minimum **$(X \geq k)$ = "tous sont $\geq k$"** (analogue avec $(X > k)$
_ $(X > k)$: utile lorsque X est définie comme le **rang d'un premier succès** (la 1ère fois que…)
Si X = rang du 1er succès **$(X > k)$ = "les k premiers essais sont des échecs"**

Remarque :
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$,
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P(X < k) = P(X \leq k - 1)}$ $\mathbf{P(X > k) = P(X \geq k + 1)}$

Exemples :

1) Reprenons l'un des exemples précédents : on lance une pièce (probabilité(pile) = p).
X est le rang du premier résultat différent des précédents.
Pour $k \geq 1$, déterminer $P(X > k)$.

$\forall k \geq 1$, $(X > k)$ = "les k premiers lancers donnent le même résultat"
$P(X > k) = P(P\ldots P \cup Q\ldots Q) = p^k + q^k$

2) On lance deux fois un dé. Soit X le plus grand numéro obtenu.
Pour $k \in \{0, \ldots, 6\}$, déterminer $P(X \leq k)$.

$\text{card}(\Omega) = 6^2 = 36$.
$\forall k \in \{0, \ldots, 6\}$, $P(X \leq k)$ = P("les deux numéros sont inférieurs à k") = P("les deux numéros sont entre 1 et k") $= \dfrac{k^2}{36}$.

Propriété :

Soit X une V.A.R.D. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors :

1) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)}$ $\qquad \mathbf{P(X < k) = \sum_{i=0}^{k-1} P(X = i)}$

$\mathbf{P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = i)}$ $\qquad \mathbf{P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i)}$

2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = F_X(k) - F_X(k - 1)}$
$\mathbf{P(X = k) = P(X < k + 1) - P(X < k)}$
$\mathbf{P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k + 1)}$
$\mathbf{P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)}$ (faire un schéma)

A l'aide d'un schéma :

…	k – 1	k	k + 1	…

…	k – 1	k	k + 1	…

…	k – 1	k	k + 1	…

…	k – 1	k	k + 1	…

Remarque :

Ces formules permettent de trouver la fonction de répartition lorsqu'on a la loi, ou inversement. Elles sont inutiles si on n'a aucune de deux

Exemple :

1) Suite du 1er exemple :

On a trouvé que $\forall$ k ≥ 1, $P(X > k) = p^k + q^k$.

Retrouver la loi de X.

$\forall k \geq 2$, $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k) = p^{k-1} + q^{k-1} - (p^k + q^k)$
$= p^{k-1}(1 - p) + q^{k-1}(1 - q) = p^{k-1}q + q^{k-1}p$.

2) Suite du deuxième exemple :

On a trouvé que $X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$ et que $\forall\, k \in \{0, \dots, 6\}$, $P(X \leq k) = \dfrac{k^2}{36}$.

Déterminer la loi de X.

$\forall\, k \in \{1, \dots, 6\}$, $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = \dfrac{k^2}{36} - \dfrac{(k-1)^2}{36} = \dfrac{k^2 - (k^2 - 2k + 1)}{36}$
$= \dfrac{2k - 1}{36}$

1.4 Espérance d'une VARD

Définition :

Soit X une VARD telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ (avec $I \subset \mathbb{N}$).
Si **$X(\Omega)$ est fini** ou si la série $\sum\limits_{i \in I} x_i.P(X = x_i)$ est **absolument convergente**, on dit que X admet une espérance. Dans ce cas, on appelle espérance de X, le réel $\mathbf{E(X) = \sum\limits_{i \in I} x_i.P(X = x_i)}$

Remarques :

_ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, la somme devient $\sum\limits_{i \in I} i.P(X = i)$
$\forall\, i \in I$, $i.P(X = i) \geq 0$. Donc $\sum i.P(X = i)$ est absolument convergente ssi si elle est convergente.
_ E(X) représente la "valeur moyenne de X". Attention à la cohérence du résultat !

Propriété

soit X et Y deux variables aléatoires qui admettent une espérance, et
si Y ≥ X (c'est-à-dire $\forall\, \omega \in \Omega$, $Y(\omega) \geq X(\omega)$) alors **E(Y) ≥ E(X)**.
En particulier, si X ≥ 0, et si X admet une espérance, E(X) ≥ 0

Exemple :
1) Suite du 1er exemple du chapitre :
On a trouvé pour loi de X :

i	0	1	2
P(X = i)	3/9	4/9	2/9

Montrer que X admet une espérance et déterminer E(X).

$X(\Omega)$ est fini donc E(X) existe et $E(X) = \sum_{i=0}^{2} i \times P(X= i) = 0 \times \frac{3}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$

2) Soit X une V.A.R.D. telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$.
Montrer que X admet une espérance et déterminer E(X).

$\sum_{k \in \mathbb{N}} k.P(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc la série converge absolument.

Donc X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1$

Théorème de transfert :

Soit X une VARD, ($X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et g une fonction de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. La VARD Y = g(X) admet une espérance si et seulement si $X(\Omega)$ est fini ou si la série $\sum_i g(x_i)P(X = x_i)$ converge absolument.

Dans ce cas, E(Y) = $\mathbf{E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i)P(X = x_i)}$

Remarques :
_ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, la formule devient $E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(i)P(X = i)$
_ cette formule est très importante. Elle servira encore plus dans les sujets "niveau 2"

Exemple : Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$.
Soit $Y = e^{-X}$. Montrer que Y admet une espérance et calculer E(Y).

$\sum_{k \geq 0} e^{-k} P(X= k) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{e^k} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{e^k} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2e)^k}$

$-1 < \frac{1}{2e} < 1$ donc la série converge absolument. Donc, d'après le théorème de transfert, Y admet une espérance et $E(Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2e)^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2e}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{2e-1}{2e}} = \frac{1}{2} \times \frac{2e}{2e-1} = \frac{e}{2e-1}$

Propriété : **Linéarité de l'espérance**

Soit X une V.A.R.D. et a et b deux réels.
Si X admet une espérance, alors Y = aX + b admet une espérance et E(Y) = **E(aX + b) = aE(X) + b**

1.5 Variance d'une V.A.R.D.

Préliminaire : Espérance de X^2

Soit X une VARD, avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
D'après le théorème de transfert, $Y = X^2$ admet une espérance si et seulement si $X(\Omega)$ est fini ou si la série $\sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i)$ est absolument convergente.

Dans ce cas, $\mathbf{E(X^2) = \sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i)}$.

Exemples :

1) Soit X une VARD qui suit la loi :

i	0	1	2
P(X = i)	3/9	4/9	2/9

Montrer que X^2 admet une espérance et déterminer $E(X^2)$

$X(\Omega)$ est fini donc X^2 admet une espérance et :

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{2} i^2 \times P(X = i) = 0^2 \times \frac{3}{9} + 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

2) Soit X une variable aléatoire telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$.

On admet que X admet une espérance et que E(X) = 1.
Montrer que X^2 admet une espérance et déterminer $E(X^2)$.

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 P(X = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \big(k(k-1) + k\big)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{8} \sum_{k \in \mathbb{N}} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{N}} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc les séries convergent absolument.

Donc d'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance et

$$E(X^2) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2 \times 8}{8} + \frac{4}{4} = 3.$$

Définition

Soit X une V.A.R.D. qui admet une espérance.
Si $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on dit que X admet une variance, et dans ce cas on appelle variance de X le nombre réel $\mathbf{V(X) = E((X - E(X))^2)}$ et écart-type de X le nombre $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Remarques :
_ $(X - E(X))^2 \geq 0$ donc $V(X) \geq 0$. La définition de $\sigma(X)$ a donc un sens
_ la variance et l'écart-type mesurent la **dispersion** d'une variable aléatoire.

Propriété - **Formule de König-Huygens** :

Soit X une V.A.R.D.
X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance.
Dans ce cas, $\mathbf{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$

Remarque : Dans la plupart des exercices, c'est ainsi qu'on calcule la variance d'une variable aléatoire.

Ex : Suite de l'exemple précédent :
Montrer que X admet une variance et déterminer V(X).

X admet une espérance et un moment d'ordre 2 et $E(X) = 1$ et $E(X^2) = 3$.
Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - 1 = 2$.

Propriété :

Soit X une V.A.R.D qui admet une variance V(X). Soit $Y = aX + b$.
Alors Y admet une variance et $V(Y) = \mathbf{V(aX + b) = a^2V(X)}$ et

$$\sigma(Y) = \boldsymbol{\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)}$$

Remarque : Attention $V(aX + b) \neq aV(X) + b$!

Interprétation :
on a donc $V(X + b) = V(X)$: une translation des valeurs ne change pas la dispersion
$V(aX) = a^2V(X)$: par exemple quand on multiplie les valeurs par 2 ou -2, la variance est multipliée par 4, et l'écart-type par 2

2. Lois usuelles

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Certaine $\mathcal{C}(a)$	résultat presque certain	$\{a\}$	$P(X = a) = 1$	a	0
Uniforme $\mathcal{U}([[1, n]])$	Equiprobabilité	$\{1,\dots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	succès de probabilité p X = 1 si succès X = 0 sinon	$\{0,1\}$	$P(X= 0) = 1 - p$ $P(X = 1) = p$	p	$p(1-p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	n épreuves de Bernoulli indépendantes X = nombre de succès	$\{0,\dots, n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$		$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	épreuves de Bernoulli indépendantes X = premier succès	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

Remarques :
_ ce tableau est à connaitre **PAR CŒUR !**
_ n'oubliez pas l'**indépendance** pour la loi binomiale et la loi géométrique
_ si $\mathbf{X \longrightarrow \mathcal{G}(p)}$: X = "rang du 1er succès". Alors **X – 1 = "nombre d'échecs avant le premier succès"**
_ si $\mathbf{X \longrightarrow \mathcal{G}(p)}$ et $k \in \mathbb{N}$:
(X > k) = "les k premiers essais sont des échecs" donc $\mathbf{P(X > k) = (1 - p)^k}$.

Exemples :
1) On lance 5 fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus.
Déterminer la loi de X, E(X), V(X).

_ la probabilité de faire 6 est 1/6
_ 5 lancers indépendants
_ X compte le nombre de 6 obtenus donc $X \longrightarrow \mathcal{B}(5, 1/6)$.
$\left(\forall k \in \{0, \dots, 5\}, P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}\right)$
$E(X) = 5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. $V(X) = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

2) On lance un dé équilibré jusqu'à faire 6. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires. Déterminer la loi de Y, E(Y), V(Y).

_ la probabilité de faire 6 est 1/6
_ les lancers indépendants
_ Y compte le rang du premier 6 obtenu   donc $Y \longrightarrow \mathcal{G}(1/6)$.

$\left(\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}\right)$ $E(Y) = \frac{1}{1/6} = 6$ $V(Y) = \frac{1 - \frac{1}{6}}{\frac{1}{36}} = \frac{5}{6} \times 36 = 30$

Remarque : On se ramène parfois à une loi usuelle par un "**décalage**" des valeurs.
("**Montrer que Y = X – a suit une loi usuelle**").
Pour cela :
_ on commence toujours par chercher l'ensemble des valeurs prises par Y
_ pour $k \in Y(\Omega)$, on "résout" l'équation Y = k, en isolant X, puis on trouve la loi de Y.
_ on reconnait la loi de Y, avec ses paramètres.
_ on peut ainsi trouver l'espérance et la variance de Y, et en déduire l'espérance et la variance de X.

Ex : Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots\}$ et $\forall k \geq 2$, $P(X = k) = \frac{1}{2^{k-1}}$.

1) On pose Y = X – 1. Quelle est la loi de Y ?
2) En déduire E(X) et V(X).

1) $X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots\}$ donc $Y(\Omega) = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$
$\forall\ k \geq 1$, $P(Y = k) = P(X - 1 = k) = P(X = k + 1) = \frac{1}{2^{k+1-1}} = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}\frac{1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2}$
Donc $Y \longrightarrow \mathcal{G}(1/2)$.

2) $E(Y) = \frac{1}{1/2} = 2$ $V(Y) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1/4} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$
X = Y + 1 donc E(X) = E(Y) + 1 = 2 + 1 = 3 $V(X) = 1^2V(Y) = 2$