Chapitre 6 : V.A.R. discrètes – Correction exercices niveau 2

Exercice 1

Si $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, alors $V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = 0$ (théorème de transfert)

La somme de nombres positifs est nulle donc $\forall i \in I,\ (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = 0$

si $P(X = x_i) \neq 0$, alors $x_i - E(X) = 0 \quad x_i = E(X)$.

X ne prend qu'une valeur : E(X). Donc X est la variable certaine.

Exercice 2

1) D'après le théorème de transfert, $G(t) = E(t^X) = \sum_{i=0}^{n} t^i P(X = i)$

2) a) Donc $G(1) = \sum_{i=0}^{n} 1^i P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$ (car $(X = i)_{1 \leq i \leq n}$ S.C.E.)

b) G est un polynôme en t, donc est de classe C^∞ et $\forall t \in \mathbb{R},\ G'(t) = \sum_{i=1}^{n} i t^{i-1} P(X = i)$

donc $G'(1) = \sum_{i=1}^{n} i P(X = i)$. Or $E(X) = \sum_{i=0}^{n} i P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} i P(X = i)$ donc $G'(1) = E(X)$.

c) De même, $G''(t) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) t^{i-2} P(X = i)$ donc

$G''(1) = \sum_{i=2}^{n} i(i-1) P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} i(i-1) P(X = i) = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$

donc $E(X^2) = G''(1) + G'(1)$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$.

3) Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$ $\quad (t^i)^{(j)} = \begin{cases} 0 \text{ si } i < j \\ i(i-1)\ldots(i-j+1)t^{i-j} \text{ si } i \geq j \end{cases}$

donc $G^{(j)}(t) = \sum_{i=j}^{n} i(i-1)\ldots(i-j+1) t^{i-j} P(X = i)$

$G^{(j)}(0) = \sum_{i=j}^{n} i(i-1)\ldots(i-j+1) 0^{i-j} P(X = i) = i(i-1)\ldots 1 \times P(X = j) = j!P(X = j)$.

Donc $P(X = j) = \dfrac{G^{(j)}(0)}{j!}$ la loi de X est entièrement déterminée par G.

4. $G(t) = \sum_{i=0}^{n} t^i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (tp)^i (1-p)^{n-i} = (tp + 1 - p)^n$ (formule du binôme)

Exercice 3

$\sum t^i P(X = i)$ converge absolument ?

$-1 \leq t \leq 1$ donc $|t^i| \leq 1$ et $|t^i P(X = i)| \leq P(X = i)$

$\sum P(X = i)$ converge (la somme vaut 1) donc $\sum |t^i P(X = i)|$ aussi. Donc la série est absolument convergente.

D'après le théorème de transfert, $Y = t^X$ admet une espérance et $E(t^X) = \sum_{i=0}^{+\infty} t^i P(X = i)$.

2. $G(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} t^i (1-p)^{i-1} p = pt \sum_{i=1}^{+\infty} t^{i-1} (1-p)^{i-1}$

$(i' = i - 1) \quad = pt \sum_{i'=0}^{+\infty} (t(1-p))^{i'} = pt \times \dfrac{1}{1 - t(1-p)} = \dfrac{pt}{1 - t + tp}$

3. $G(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{t^i \lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{(t\lambda)^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{t\lambda} = e^{\lambda(1-t)}$

Exercice 4

1) (X = k) = "il y a k échecs avant le n-ème succès"

= 'il y a n + k essais, n – 1 succès parmi les n + k – 1 premiers, le n-ème succès étant le dernier essai"

Choix de la place des k échecs : $\binom{k+n-1}{k}$ possibilités

P(n succès et k échecs) = $q^k \times p^n$ donc $P(X = k) = \binom{k+n-1}{k} p^n q^k$

2) $\binom{-n}{k} p^n (-q)^k = \dfrac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} p^n q^k (-1)^k = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} p^n q^k$

(k facteurs)

$= \dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} p^n q^k = P(X = k)$

3) a) $(j - i + 1) \times \binom{j}{j-i+1} = \dfrac{(j-i+1)\, j!}{(j-i+1)!(i-1)!} = \dfrac{j!}{(j-i)!(i-1)!}$

$i \times \binom{j}{i} = i \times \dfrac{j!}{i!(j-i)!} = \dfrac{j!}{(j-i)!(i-1)!}$ donc vrai

$\sum_{k \geq 0} kP(X = k) = \sum_{k \geq 0} k \binom{k+n-1}{k} p^n q^k = \sum_{k \geq 1} k \binom{k+n-1}{k} p^n q^k = \sum_{k \geq 1} n \binom{k+n-1}{n} p^n q^k$

$= np^n \sum_{k' \geq n} \binom{k'}{n} q^{k'-n+1}$ $(k' = k + n - 1)$ $= np^n q \sum_{k' \geq n} \binom{k'}{n} q^{k'-n}$. Donc la série converge (absolument), donc l'espérance existe et vaut : $np^n q \times \dfrac{1}{(1-q)^{n+1}} = \dfrac{np^n q}{p^{n+1}} = \dfrac{nq}{p}$.