

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini et telle que $V(X) = 0$.

Montrer que X est une variable certaine.

(On pourra supposer que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et utiliser la définition de la variance)

Exercice 2 – Fonction génératrice d'une variable finie

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}$.

1. On appelle fonction génératrice de X la fonction, définie pour tout réel t , par $G(t) = E(t^X)$.

Exprimer $G(t)$ à l'aide d'une somme.

2. a. Calculer $G(1)$.

b) Montrer que $G'(1) = E(X)$.

c) Exprimer $V(X)$ en fonction de $G''(1)$ et de $G'(1)$.

3. a) Pour tout j de $\{0, \dots, n\}$, calculer $G^{(j)}(t)$.

b) A l'aide de $G^{(j)}(0)$, montrer que la loi de X est entièrement déterminée par G (la seule connaissance de G permet de retrouver la loi de X , (d'où le nom de "fonction génératrice").

4. Exemple : Soit $X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$ ($n \geq 1, p \in]0; 1[$). Montrer que $G(t) = (1 - p + pt)^n$.

Exercice 3 – Fonction génératrice d'une variable discrète

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall t \in [-1; 1], Y = t^X$ admet une espérance.

On appelle fonction génératrice de X la fonction définie sur $[-1; 1]$ par : $G(t) = E(t^X)$.

2. Exemples :

a) Soit $p \in]0; 1[$ et $X \rightarrow \mathcal{G}(p)$. Déterminer la fonction génératrice de X .

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer la fonction génératrice de X .

Exercice 4 : Loi binomiale négative

Soit $p \in]0; 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $q = 1 - p$.

On considère une épreuve de Bernoulli de succès de probabilité p . On répète cette épreuve de manière indépendante jusqu'à obtenir un $n^{\text{ème}}$ succès. On note alors X la variable aléatoire égale au nombre d'échecs avant ce n -ème succès.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \binom{k+n-1}{k} p^n q^k$.

2) Notation : par analogie avec les coefficients binomiaux, on convient de définir :

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!}.$$

Montrer qu'on a alors : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \binom{-n}{k} p^n (-q)^k$.

On admet (formule du binôme négatif) que

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x| < 1, \forall r \in \mathbb{N}, \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}.$$

3) a) Montrer que $\forall i, j \in \mathbb{N}^*$ avec $i \leq j, i \times \binom{j}{i} = (j-i+1) \times \binom{j}{j-i+1}$

b) Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \frac{nq}{p}$.