

Exercice 1

On considère une urne contenant 5 boules : 2 noires et 3 blanches.

On tire des boules sans les remettre, jusqu'à obtenir une boule blanche.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de X .

Exercice 2

On considère une pièce telle que $P(\text{Pile}) = 2/3$. Soit $n \geq 1$. On lance n fois cette pièce. On note T_n le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile, s'il y en a au moins un. On convient que $T_n = n + 1$ si et seulement si on n'a pas obtenu de Pile durant les n lancers.

1) Donner la loi de T_n .

2) Vérifier que $\sum_{k=1}^{n+1} P(T_n = k) = 1$.

Exercice 3

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = \lambda \left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Déterminer la valeur de λ pour laquelle la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p_k$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $F_X(k)$ et $P(X > k)$.

Exercice 4

Soit $n \geq 3$. On considère n boules numérotées de 1 à n .

On tire deux boules simultanément. On note X le plus grand nombre tiré, et Y le plus petit.

1) Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

2) a) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, montrer que $P(X \leq k) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$.

b) En déduire la loi de X .

3) a) Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(Y \geq k) = \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)}$.

b) En déduire la loi de Y .

4) Que deviennent les lois de X et de Y si les tirages sont successifs avec remise ?

Exercice 5

1) Dans l'exercice 1, déterminer l'espérance de X .

2) a) Montrer que $\forall x \in]-1;1[, \forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 + x^n(nx - (n+1))}{(1-x)^2}$

b) Dans l'exercice 2, en déduire $E(T_n)$.

3) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de l'exercice 3.

$\left(X(\Omega) = \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^k \right)$.

Montrer que X admet une espérance et déterminer $E(X)$.

4) Pour la variable aléatoire X de l'exercice 4, question 2, déterminer $E(X)$.