Chapitre 6 – VAR discrètes – Feuille n°2

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$.

Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.

Exercice 2

A l'exercice 1 de la feuille n°1, on a trouvé

i	1	2	3
P(X = i)	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

avec $E(X) = \frac{3}{2}$

Déterminer la variance de X.

Exercice 3

On considère la variable aléatoire X de l'exercice 3 feuille n°1.

$\left(X(\Omega) = \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k,\ E(X) = 3\right)$.

1) Montrer que la variable aléatoire $Y = \frac{X}{3^X}$ admet une espérance que l'on déterminera.

2) Montrer que X admet une variance et calculer V(X).

Exercice 4

On considère une pièce truquée avec laquelle on obtient pile avec une probabilité $p = \frac{1}{4}$.

1) On lance une fois la pièce. On définit la V.A.R. X par : X = 1 si on obtient pile, X = 0 sinon. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2) On lance 10 fois la pièce. On note Y la V.A.R. égale au nombre de piles obtenus. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

3) On lance la pièce jusqu'à obtenir un pile.

a) On note Z la V.A.R. égale au nombre de lancers effectués. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.

b) On note Z' la variable égale au nombre de faces obtenus. Déterminer l'espérance et la variance de Z'.

4) On lance la pièce jusqu'à obtenir un deuxième pile. On note T le nombre total de lancers effectués.

a) Déterminer la loi de T.

b) Montrer que T admet une espérance et déterminer E(T).

Exercice 5

Soit X la variable aléatoire définie à l'exercice 3. On pose Y = X + 1.

Montrer que Y suit une loi usuelle. Retrouver les valeurs de E(X) et V(X).