

## Chapitre 6 : Variables aléatoires discrètes

### 1. Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

#### 1.1 Définition et loi

Définitions :

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $X$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note :  $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$

Si pour tout réel  $x$ ,  $(X \leq x) \in \mathcal{A}$ , on dit que  $X$  est une **variable aléatoire**.

De plus, si on peut écrire  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ , où  $I$  est une partie de  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , on dit que  $X$  est une **variable aléatoire discrète (VARD)**

Définition :

Soit  $X$  une V.A.R.D.

On appelle **loi de probabilité de  $X$**  la donnée de  $X(\Omega)$  et de  $P(X = x_i)$ , pour tout  $x_i \in X(\Omega)$ .

Propriété :

Soit  $X$  une V.A.R.D., avec  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ .

Alors la famille  $(X = x_i)_{i \in I}$  est un **système complet d'événements de  $\Omega$** .

En particulier, on a donc : 
$$\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1.$$

Propriété :

Si  $X$  et  $Y$  sont des V.A.R. discrètes et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda X$ ,  $X + Y$ ,  $\max(X, Y)$ ,  $\min(X, Y)$ ,  $XY$  sont des V.A.R. discrètes.

Méthode :

**Pour trouver la loi d'une VARD  $X$  :**

- \_ identifier la définition de  $X$  : " $X$  est le nombre de ..."
  - \_ déterminer  $X(\Omega)$
  - \_ pour  $x \in X(\Omega)$ , déterminer  $(X = x)$  puis  $P(X = x)$ .
- (Si  $X(\Omega)$  est petit, on présente souvent le résultat dans un tableau)
- \_ on peut aussi reconnaître une loi usuelle (voir paragraphe 2)

Exemples :

1) On lance 3 fois une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est  $2/3$ .

On dit qu'un lancer est un changement s'il amène un résultat différent du précédent.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les 3 lancers.

Déterminer la loi de  $X$ .

2) On considère une pièce truquée dont la probabilité de faire pile est  $p \in ]0;1[$ . On pose  $q = 1 - p$ . On lance la pièce, puis on relance la pièce jusqu'à obtenir un résultat différent du premier. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires en tout. Quelle est la loi de  $X$  ?

Propriété :

Soit  $I$  une partie de  $\mathbb{N}$ . Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de réels distincts et soit  $(p_i)_{i \in I}$  une famille de réels. Il existe une variable aléatoire  $X$  telle que  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$  et  $\forall i \in I, P(X = x_i) = p_i$  si et seulement si

$$\begin{cases} \forall i \in I, p_i \geq 0 \\ \sum_{i \in I} p_i = 1 \end{cases}$$

On dit que la famille  $(p_i)_{i \in I}$  définit une loi de probabilité.

Exemple :

Soit  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ .

Montrer que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit une loi de probabilité.

## 1.2 Fonction de répartition

Définition :

Soit  $X$  une V.A.R.

On appelle fonction de répartition de  $X$  l'application :  $F_X$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$

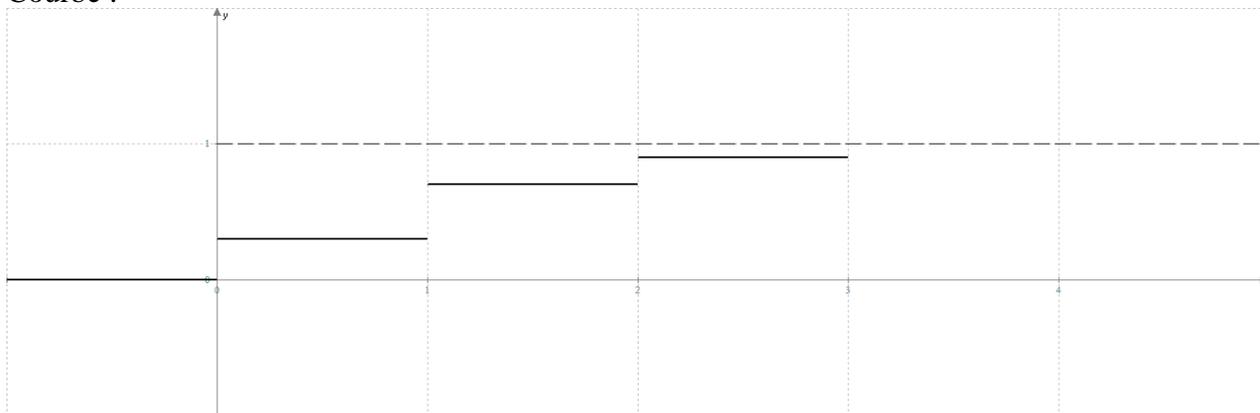
Propriétés de la fonction de répartition :

Soit  $X$  une V.A.R. et  $F_X$  sa fonction de répartition.

- 1)  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$
- 2)  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- 4)  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a \leq b, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

## 1.3 Fonction de répartition d'une VAR discrète

Courbe :



Si  $X$  est une VARD,  $F_X$  est une fonction qui est constante par intervalle, n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ , n'est pas strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

Dans le cas d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on étudie plutôt  $P(X \leq k)$ , avec  $k \in \mathbb{N}$ , (ou  $P(X > k)$ ,  $P(X < k)$ ,  $P(X \geq k)$ ).

IMPORTANT : Méthode :

Dans certaines situations, il est plus simple de chercher la fonction de répartition que la loi :

\_  $(X \leq k)$  : utile lorsque  $X$  est définie comme un **maximum**

**Si  $X = \text{maximum}$   $(X \leq k) = \text{"tous sont } \leq k\text{"}$  (analogue avec  $(X < k)$**

\_  $(X \geq k)$  : utile lorsque  $X$  est définie comme un **minimum**.

**Si  $X = \text{minimum}$   $(X \geq k) = \text{"tous sont } \geq k\text{"}$  (analogue avec  $(X > k)$**

\_  $(X > k)$  : utile lorsque  $X$  est définie comme le **rang d'un premier succès** (la 1<sup>ère</sup> fois que...)

**Si  $X = \text{rang du 1}^{\text{er}} \text{ succès}$   $(X > k) = \text{"les } k \text{ premiers essais sont des échecs"}$**

Remarque :

Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X < k) = P(X \leq k - 1) \quad P(X > k) = P(X \geq k + 1)$$

Exemples :

1) Reprenons l'un des exemples précédents : on lance une pièce (probabilité(pile) = p).

X est le rang du premier résultat différent des précédents.

Pour  $k \geq 1$ , déterminer  $P(X > k)$ .

2) On lance deux fois un dé. Soit X le plus grand numéro obtenu.

Pour  $k \in \{0, \dots, 6\}$ , déterminer  $P(X \leq k)$ .

Propriété :

Soit X une V.A.R.D. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Alors :

$$1) \forall k \in \mathbb{N}, \quad F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k P(X = i) \qquad P(X < k) = \sum_{i=0}^{k-1} P(X = i)$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = i) \qquad P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X = i)$$

$$2) \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = F_X(k) - F_X(k - 1)$$

$$P(X = k) = P(X < k + 1) - P(X < k)$$

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k + 1)$$

$$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k) \text{ (faire un schéma)}$$

A l'aide d'un schéma :

...	k - 1	k	k + 1	...
-----	-------	---	-------	-----

...	k - 1	k	k + 1	...
-----	-------	---	-------	-----

...	k - 1	k	k + 1	...
-----	-------	---	-------	-----

...	k - 1	k	k + 1	...
-----	-------	---	-------	-----

Remarque :

Ces formules permettent de trouver la fonction de répartition lorsqu'on a la loi, ou inversement. Elles sont inutiles si on n'a aucune de deux

Exemple :

1) Suite du 1<sup>er</sup> exemple :

On a trouvé que  $\forall k \geq 1, P(X > k) = p^k + q^k$ . Retrouver la loi de X.

2) Suite du deuxième exemple :

On a trouvé que  $X(\Omega) = \{1, \dots, 6\}$  et que  $\forall k \in \{0, \dots, 6\}, P(X \leq k) = \frac{k^2}{36}$ .

Déterminer la loi de X.

## 1.4 Espérance d'une VARD

Définition :

Soit X une VARD telle que  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$  (avec  $I \subset \mathbb{N}$ ).

Si **X(Ω) est fini** ou si la série  $\sum_{i \in I} x_i \cdot P(X = x_i)$  est **absolument convergente**, on dit que X admet une

espérance. Dans ce cas, on appelle espérance de X, le réel  $E(X) = \sum_{i \in I} x_i \cdot P(X = x_i)$

Remarques :

\_ si  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ , la somme devient  $\sum_{i \in I} i \cdot P(X = i)$

$\forall i \in I, i \cdot P(X = i) \geq 0$ . Donc  $\sum_{i \in I} i \cdot P(X = i)$  est absolument convergente ssi si elle est convergente.

\_  $E(X)$  représente la "valeur moyenne de X". Attention à la cohérence du résultat !

Propriété

soit X et Y deux variables aléatoires qui admettent une espérance, et

**si  $Y \geq X$**  (c'est-à-dire  $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) \geq X(\omega)$ ) alors  **$E(Y) \geq E(X)$** .

En particulier, si  $X \geq 0$ , et si X admet une espérance,  $E(X) \geq 0$

Exemple :

1) Suite du 1er exemple du chapitre :

On a trouvé pour loi de X :

i	0	1	2
P(X = i)	3/9	4/9	2/9

Montrer que X admet une espérance et déterminer E(X).

2) Soit X une V.A.R.D. telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$ .

Montrer que X admet une espérance et déterminer E(X).

### Théorème de transfert :

Soit X une VARD,  $(X(\Omega) = \{x_i, i \in I\})$  et g une fonction de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ . La VARD  $Y = g(X)$  admet une espérance si et seulement si  $X(\Omega)$  est fini ou si la série  $\sum_i g(x_i)P(X = x_i)$  converge absolument.

Dans ce cas,  $E(Y) = \mathbf{E}(g(\mathbf{X})) = \sum_{i \in I} g(x_i)P(\mathbf{X} = x_i)$

Remarques :

\_ si  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ , la formule devient  $E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(i)P(X = i)$

\_ cette formule est très importante. Elle servira encore plus dans les sujets "niveau 2"

Exemple : Soit X une variable aléatoire telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$ .

Soit  $Y = e^{-X}$ . Montrer que Y admet une espérance et calculer E(Y).

**Propriété : Linéarité de l'espérance**

Soit  $X$  une V.A.R.D. et  $a$  et  $b$  deux réels.

Si  $X$  admet une espérance, alors  $Y = aX + b$  admet une espérance et  $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$

## 1.5 Variance d'une V.A.R.D.

**Préliminaire : Espérance de  $X^2$** 

Soit  $X$  une VARD, avec  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ .

D'après le théorème de transfert,  $Y = X^2$  admet une espérance si et seulement si  $X(\Omega)$  est fini ou si la série

$\sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i)$  est absolument convergente.

Dans ce cas,  $E(X^2) = \sum_{i \in I} x_i^2 P(X = x_i)$ .

Exemples :

1) Soit  $X$  une VARD qui suit la loi :

$i$	0	1	2
$P(X = i)$	3/9	4/9	2/9

Montrer que  $X^2$  admet une espérance et déterminer  $E(X^2)$

2) Soit  $X$  une variable aléatoire telle que :  $X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$ .

On a vu que  $X$  admet une espérance et que  $E(X) = 1$ .

Montrer que  $X^2$  admet une espérance et déterminer  $E(X^2)$ .

## Définition

Soit  $X$  une V.A.R.D. qui admet une espérance.

$(X - E(X))^2$  admet une espérance, on dit que  $X$  admet une variance, et dans ce cas on appelle variance de  $X$  le nombre réel  $V(X) = E((X - E(X))^2)$  et écart-type de  $X$  le nombre  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques :

- \_  $(X - E(X))^2 \geq 0$  donc  $V(X) \geq 0$ . La définition de  $\sigma(X)$  a donc un sens
- \_ la variance et l'écart-type mesurent la **dispersion** d'une variable aléatoire.

Propriété - **Formule de König-Huygens** :

Soit  $X$  une V.A.R.D.

$X$  admet une variance si et seulement si  $X^2$  admet une espérance.

Dans ce cas,  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Remarque : Dans la plupart des exercices, c'est ainsi qu'on calcule la variance d'une variable aléatoire.

Ex : Suite de l'exemple précédent :

Montrer que  $X$  admet une variance et déterminer  $V(X)$ .

Propriété :

Soit  $X$  une V.A.R.D qui admet une variance  $V(X)$ . Soit  $Y = aX + b$ .

Alors  $Y$  admet une variance et  $V(Y) = V(aX + b) = a^2V(X)$  et

$$\sigma(Y) = \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

Remarque : Attention  $V(aX + b) \neq aV(X) + b$  !

Interprétation :

on a donc  $V(X + b) = V(X)$  : une translation des valeurs ne change pas la dispersion

$V(aX) = a^2V(X)$  : par exemple quand on multiplie les valeurs par 2 ou -2, la variance est multipliée par 4, et l'écart-type par 2

## 2. Lois usuelles

Nom	Situation	$X(\Omega)$	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Certaine $\mathcal{C}(a)$					
Uniforme $\mathcal{U}([1, n])$					
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$					
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$					
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$					
Géométrique $\mathcal{G}(p)$					

Remarques :

\_ ce tableau est à connaître **PAR CŒUR !**

\_ n'oubliez pas l'**indépendance** pour la loi binomiale et la loi géométrique

\_ si  $\mathbf{X} \rightarrow \mathcal{G}(p)$  :  $X =$  "rang du 1<sup>er</sup> succès". Alors  $\mathbf{X} - 1 =$  "nombre d'échecs avant le premier succès"

\_ si  $\mathbf{X} \rightarrow \mathcal{G}(p)$  et  $k \in \mathbb{N}$  :

$(\mathbf{X} > k) =$  "les  $k$  premiers essais sont des échecs" donc  $P(\mathbf{X} > k) = (1 - p)^k$ .

Exemples :

1) On lance 5 fois un dé équilibré. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus.

Déterminer la loi de  $X$ ,  $E(X)$ ,  $V(X)$ .

2) On lance un dé équilibré jusqu'à faire 6. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires. Déterminer la loi de  $Y$ ,  $E(Y)$ ,  $V(Y)$ .

Remarque : On se ramène parfois à une loi usuelle par un "**décalage**" des valeurs.  
("Montrer que  $Y = X - a$  suit une loi usuelle").

Pour cela :

- \_ on commence toujours par chercher l'ensemble des valeurs prises par  $Y$
- \_ pour  $k \in Y(\Omega)$ , on "résout" l'équation  $Y = k$ , en isolant  $X$ , puis on trouve la loi de  $Y$ .
- \_ on reconnaît la loi de  $Y$ , avec ses paramètres.
- \_ on peut ainsi trouver l'espérance et la variance de  $Y$ , et en déduire l'espérance et la variance de  $X$ .

Ex : Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $X(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots\}$  et  $\forall k \geq 2, P(X = k) = \frac{1}{2^{k-1}}$ .

- 1) On pose  $Y = X - 1$ . Quelle est la loi de  $Y$  ?
- 2) En déduire  $E(X)$  et  $V(X)$ .