Chapitre 7 – Systèmes et Matrices

1. Rappels sur les systèmes

Définition :

Un système linéaire de n équations à n inconnues est **de Cramer** si et seulement s'il admet **une unique solution**.
(Sinon, il admet aucune solution ou une infinité de solutions)

Remarque :
Un système homogène est de Cramer s'il n'admet que la solution nulle.

Propriété :

Un système **triangulaire** (de n équations à n inconnues) est de Cramer si et seulement si les **coefficients diagonaux sont tous non nuls**.

Rappel : **Opérations autorisées sur les lignes :**

_ échange de deux lignes : $\mathbf{L_i \leftrightarrow L_j}$
_ multiplication d'une ligne par un réel non nul : $\mathbf{L_i \leftarrow \alpha L_i}$ avec $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$.
_ combinaison de deux lignes : $\mathbf{L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j}$ avec $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$ **et** $\mathbf{L_j}$ **fixe.**

Remarques :
_ Dans le cas d'un système : $\begin{cases} ax + \dots \\ bx + \dots \end{cases}$ l'opération $L_2 \leftarrow bL_1 - aL_2$ (si $a \neq 0$) permet d'éliminer le terme en 'x' dans L_2.
_ Pensez toujours à ouvrir les yeux, pour reconnaitre une combinaison simple ou une substitution simple qui permet d'avancer dans la résolution du système.
_ Une ligne du type " a=a " est toujours vraie, donc elle peut être éliminée du système
Une ligne du type " a=b " (où $b \neq a$) est toujours fausse : le système n'a alors aucune solution.

Méthode du pivot de Gauss :
Principe : Transformer un système quelconque en système triangulaire.

Soit le système : (S) $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$

Méthode :
- 1$^{\text{ère}}$ étape :
si $a_{1,1} \neq 0$, a_{11} est appelé "premier pivot". (sinon, on échange L_1 avec une autre ligne)
_ on ne modifie pas la ligne L_1
_ pour chaque ligne L_k, $k \in \{2, .., n\}$, on effectue une combinaison avec L_1 pour que le coefficient $a_{k,1}$ s'annule. (on fait par exemple : $L_k \leftarrow a_{1,1}L_k - a_{k,1}L_1$)

On obtient un système du type : $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \qquad\quad a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\quad .... \\ \qquad\quad a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$

- 2$^{\text{ème}}$ étape : si $a_{2,2} \neq 0$, on le prend comme pivot. Sinon, on échange la ligne L_2 avec une ligne L_k ($k > 2$), pour obtenir $a_{2,2} \neq 0$.
On ne modifie plus les lignes L_1 et L_2. On modifie les lignes L_3 à L_n à l'aide de L_2 pour éliminer les coefficients en x_2.

On répète cette étape jusqu'à ce que le système soit triangulaire. (il y a au plus n étapes).

Exemple : Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ 4x - 2y + z = 0 \\ -x + y - z = 2 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 2 & \\ 10y + z = 8 & L_2 \leftarrow 4L_1 - 3L_2 \\ 4y - 2z = 8 & L_3 \leftarrow L_1 + 3L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 2 & \\ 10y + z = 8 & \\ 12z = -24 & L_3 \leftarrow 2L_2 - 5L_3 \end{cases} \quad \text{(le système est de Cramer)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 2 = 2 \\ 10y - 2 = 8 \\ z = -\dfrac{24}{12} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \{(1,1,-2)\}$$

Rappel :
Soit un système à **p équations et n inconnues** (**n > p**).
Si le système est triangulaire pour les p premières inconnues, avec des coefficients diagonaux non nuls, ces p premières inconnues sont appelées **inconnues principales**, et les n – p autres sont appelées **inconnues secondaires**.
Dans ce cas, il y a une infinité de solutions. On trouve les solutions en exprimant les inconnues principales en fonctions des inconnues secondaires.

Ex : Résoudre (S) : $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

(S) est un système de Cramer en (x, y) z : inconnue secondaire

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z + z = 0 \\ y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z}{2} \\ y = -2z \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{z}{2}, -2z, z \right), z \in \mathbb{R} \right\}$$

Systèmes à paramètres :

Principe général : **Le pivot ne peut pas s'annuler !**
Si le pivot peut s'annuler, il faut échanger les lignes (ou la place des inconnues) pour obtenir un pivot sans paramètre.
Quand on obtient un système triangulaire, on cherche pour quelles valeurs les coefficients diagonaux s'annulent, et on étudie séparément les différents cas.

Exemple :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions du système $\begin{cases} ax + 2y = 0 \\ x + 2ay = 0 \end{cases}$ en fonction des valeurs de a.

$$\begin{cases} ax + 2y = 0 \\ x + 2ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2ay = 0 \\ ax + 2y = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \begin{cases} x + 2ay = 0 \\ (2a^2 - 2)y = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow aL_1 - L_2$$

Le système n'est pas de Cramer ssi $2a^2 - 2 = 0$ $a^2 - 1 = 0$ $(a - 1)(a + 1) = 0$ $a = 1$ ou -1

_ si $a = 1$ $x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$ $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$

_ si $a = -1$ $x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$ $S_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$

_ si $a \neq 1$ et -1 le système est homogène et de Cramer donc $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Remarques :

_ Dans le cas d'une équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $P = aX^2 + bX + c$, et on cherche les valeurs de a, b et c.

Rappel : **Identification des coefficients**

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
En particulier, un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.

Remarques :

_ Dans le cas d'une équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et on cherche les valeurs de a, b, c et dc. (deux matrices sont égales si et seulement tous leurs coefficients sont égaux).
_ Dans les deux cas, attention à conclure en donnant le polynôme ou la matrice. (si on cherche un polynôme, on trouve… un polynôme, si on cherche une matrice, on trouve… une matrice).

Ex :

Déterminer le(s) polynôme(s) P de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(X) - P'(X) = X^2$

On pose $P(X) = aX^2 + bX + c$ donc $P'(X) = 2aX + b$
$P(X) - P'(X) = aX^2 + bX + c - (2aX + b) = aX^2 + (b - 2a)X + c - b$

Par identification des coefficients : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 0 \\ c - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$ donc $P(X) = X^2 + 2X + 2$

2. Rappels sur les matrices

2.1 Inverse d'une matrice

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{AB = I_n}$ (ou $BA = I_n$).
Dans ce cas, on note $A^{-1} = B$.

Rappel : On ne peut pas écrire "A^{-1}" tant que l'on n'a pas montré que A est inversible !

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Alors le système **$AX = B$** (d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est **de Cramer** si et seulement si **A est inversible**.
Dans ce cas, la solution est : **$X = A^{-1}B$**.

Rappel : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de A le nombre **$\det(A) = ad - bc$**.

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **A est inversible** si et seulement si **$\det(A) \neq 0$**.

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
_ si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$
_ si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et **$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$**

(Attention à l'ordre !)

Remarque :
_ Soit A, A' et P trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que P est inversible et que **$A = PA'P^{-1}$**.
Si A' est inversible, alors A est inversible comme produit de matrices inversibles et
$A^{-1} = PA'^{-1}P^{-1}$ (car $A^{-1} = (PA'P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}A'^{-1}P^{-1} = PA'^{-1}P^{-1}$)

Méthodes pour montrer qu'une matrice est inversible ou trouver son inverse :

_ si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Utiliser le déterminant de A
_ si l'inverse est donnée : **faire le produit avec A et vérifier que le produit est égal à I_n**.
(Attention à ne pas l'écrire A^{-1} avant d'avoir fait le produit !)
_ si A est diagonale : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors A est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$
_ si A est triangulaire : A est inversible ssi les coefficients diagonaux sont tous non nuls.
_ si on a une **égalité matricielle : la transformer pour obtenir $A \times .. . = I_n$**
_ si A est un produit de matrices inversibles (en particulier $A = PA'P^{-1}$)
_ sinon, par pivot de Gauss : on transforme A pour la rendre triangulaire, puis diagonale, puis identité. On effectue les mêmes opérations sur I_n.
_ pour montrer que **A n'est pas inversible**, on peut **raisonner par l'absurde** : on suppose que A est inversible, on utilise A^{-1}, et on arrive à une contradiction.

Ex : 1) Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - A - 2I_2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

a) $\qquad\qquad\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ donc $A^2 - A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$

b) $A^2 - A - 2I_2 = 0_2$ donc $A^2 - A = 2I_2$ $\quad A(A - I_2) = 2I_2 \quad A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_2\right) = I_2$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_2 = \frac{1}{2}(A - I_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} L_1 \leftarrow 5L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{cases}$ donc A est inversible

$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 5 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/3 & 5/3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{15}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{matrix}$ donc $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

2.2 Puissance de matrices

Rappel :

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On peut définir A^n par : $\begin{cases} \mathbf{A^0 = I_p} \\ \forall\, \mathbf{n \in \mathbb{N},\ A^{n+1} = A^n \times A} \end{cases}$.

Remarques :
_ Puisqu'on a une relation de récurrence (relation entre A^n et A^{n+1}), on pourra utiliser le raisonnement par récurrence.
_ $\forall\, A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{(\lambda A)^n = \lambda^n A^n}$

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. S'il existe $k \geq 2$ tel que $\mathbf{A^k = 0_p}$, on dit que A est **nilpotente**.

Remarque : En particulier, on peut montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes.

Propriété :

Soit B et C deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si B et C **commutent** (BC = CB), alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{(B + C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k B^{n-k}}$

Remarques :
_ la matrice identité commute avec toutes les matrices. (Les matrices de la forme λI_p, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ aussi)
_ cette formule du binôme est utile en particulier quand l'une des matrices est nilpotente (dans ce cas, mettre cette matrice à la puissance 'k', et l'autre à la puissance 'n-k').
_ les "identités remarquables" sont valables pour les matrices, à condition qu'elles commutent !
Si AB = BA, $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

Propriété :

Soit A, B, P trois matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que P est inversible et que $\mathbf{A = PBP^{-1}}$.
Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A^n = PB^nP^{-1}}$

Démonstration :
En effet, $A^n = (PBP^{-1})^n = PBP^{-1}PBP^{-1}\dots PBP^{-1}$
$= PB(P^{-1}P)B\dots(P^{-1}P)BP^{-1}$
$= PBI_pB\dots I_pBP^{-1}$
$= PB^nP^{-1}$

Résumé :

Méthodes pour déterminer A^n :
_ si A est **diagonale** : $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$ alors $A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}$
_ par **récurrence** (avec ou sans coefficients indéterminés)
_ si $\mathbf{A = PBP^{-1}}$ (P inversible) alors $\mathbf{A^n = PB^nP^{-1}}$
_ par la formule du binôme de Newton

Exemples :

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Déterminer l'expression de a_n en fonction de n. Conclusion ?

a) Par récurrence sur n :

_ pour n = 0 : $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad a_0 = 0$ convient.

_ supposons qu'à un rang n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $A^{n+1} = A^n.A = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 + a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $a_{n+1} = a_n + 2$ convient.

Conclusion :

En posant : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) La suite (a_n) est arithmétique de raison 2. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + n.2 = 2n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice N telle que $A = - I_2 + N$.
En déduire l'expression de A^n en fonction de n, pour $n \geq 1$.
b) La formule est-elle vraie pour n = 0 ?

a) $A = - I_2 + N \Leftrightarrow N = A + I_2$ donc $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$(- I_2) \times N = - N \quad N \times (- I_2) = - N$ donc $- I_2$ et N commutent.

$N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc d'après la formule du binôme de Newton :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (-I_2 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-I_2)^{n-k}N^k$

Pour $n \geq 1$

$$= \binom{n}{0} (-I_2)^n N^0 + \binom{n}{1}(-I_2)^{n-1}N^1 + 0$$
$$= 1 \times (-1)^n I_2^n I_2 + n(-1)^{n-1}I_2^{n-1}N$$
$$= (-1)^n I_2 + n(-1)^{n-1}N$$
$$= (-1)^{n-1}(-I_2 + nN)$$
$$= (-1)^{n-1}\left(-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= (-1)^{n-1}\begin{pmatrix} -1 - 2n & 4n \\ -n & -1 + 2n \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 2n + 1 & -4n \\ n & 1 - 2n \end{pmatrix}$$

b) Pour n = 0 : $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (-1)^0\begin{pmatrix} 2\times0+1 & -4\times0 \\ 0 & 1-2\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc la formule est vraie au rang 0.

Remarque : **Suites récurrentes et puissances de matrices :**
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$.
On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X_{n+1} = M.X_n}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$,

si $n \geq p$, $\mathbf{X_n = M^{n-p}.X_p}$

Cette formule est à redémontrer à chaque fois par récurrence. On notera l'analogie évidente avec les suites géométriques. (mais attention à l'ordre des matrices !)

Exemple :
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 4y_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n \end{cases}$
Déterminer l'expression de x_n et y_n en fonction de n.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_n + 4y_n \\ -x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A.X_n$, avec $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
X_n est une suite « géométrique » de raison A à droite, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$
D'après la question précédente, $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}$.
Donc $X_n = (-1)^n \begin{pmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 10n+1 \\ 5n-2 \end{pmatrix}$
Donc $x_n = (-1)^n(10n + 1)$ $\quad y_n = (-1)^n(5n - 2)$

2.3 Polynôme, polynôme annulateur

Définition : Polynôme d'une matrice carrée

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
On note P(A) la matrice définie par : $\mathbf{P(A) = a_nA^n + \ldots + a_1A + a_0I_n}$.

Définition :

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
On dit que P est un **polynôme annulateur de A** si $\mathbf{P(A) = 0_p}$.

Exemple :
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A.
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
$A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$
donc $X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A.