Chapitre 7 – Systèmes et matrice – Correction niveau 2

Exercice 1

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+2 & 2a+1 & 2a+1 \\ 2a+1 & a^2+2 & 2a+1 \\ 2a+1 & 2a+1 & a^2+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a^2+a & 2a+1 & 2a+1 \\ 2a+1 & 2a^2+a & 2a+1 \\ 2a+1 & 2a+1 & 2a^2+a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2-a+2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2-a+2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$$

$= (2a + 1)A + (-a^2 - a + 2)I_3$

$A^2 - (2a + 1)A = (-a^2 - a + 2)I_3 \qquad A(A - (2a + 1)I) = (a - 1)(-a - 2)I_3$

si $a \neq 1$ et $a \neq -2$, A est inversible (et $A^{-1} = \dfrac{1}{(a-1)(-a-2)}(A - (2a+1)I)$

si $a = 1$ ou $a = -2$ $A(A - (2a + 1)I) = 0$ donc A n'est pas inversible (si A est inversible, on multiplie par A^{-1} et on trouve une contradiction).

Ou : $L_1 \leftrightarrow L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow aL_1 - L_2 \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$ $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$ Si $a = 1$: A n'est pas inversible.

Si $a \neq 1$: $L_2 \leftarrow \dfrac{1}{a-1}L_2 \quad L_3 \leftarrow \dfrac{1}{a-1}L_3$: $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftrightarrow L_3$ $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a+1 & 1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow (a + 1)L_2 - L_3$ $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-2 \end{pmatrix}$ inversible ssi $a \neq -2$.

Exercice 2

1. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Alors $AD = DA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & 4b \\ -c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 4c & 4d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ donc $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$.

2. Si $M^3 - 2M = D$.

Alors $MD = M(M^3 - 2M) = M^4 - 2M^2$ et $DM = (M^3 - 2M)M = M^4 - 2M^2$.

Donc M et D commutent. Donc $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$.

Donc $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} a^3-2a & 0 \\ 0 & d^3-2d \end{pmatrix}$.

$M^3 - 2M = D \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - 2a = -1 \\ d^3 - 2d = 4 \end{cases}$

$a^3 - 2a + 1 = 0$ (1 racine évidente) en factorisant : $(a - 1)(a^2 + a - 1) = 0$

$\Delta = 5 \quad a_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad a_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$d^3 - 2d - 4 = 0$ (2 racine évidente) $(d - 2)(d^2 + 2d + 2) = 0$

$\Delta = -4 < 0$ 3 matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Montrons que $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$:

$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 - A^2B + AB^2 + BA^2 - BAB + B^3$

$= A^3 - A(BA) + (BA)B + (AB)A - BAB + B^3 = A^3 + B^3$. (car A et B commutent)

Donc $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = B^3$ (car $A^3 = 0$)

Donc $(A + B)(A^2 - AB + B^2)(B^{-1})^3 = I_n$.

Donc A + B est inversible.

Exercice 4 1) $\sum_{i=0}^{+\infty} x^i = \dfrac{1}{1-x}$ donc $\left(\sum_{i=0}^{+\infty} x^i\right)(1 - x) = 1$.

2) Par analogie, a-t-on une égalité équivalente sur les matrices (N étant nilpotente, la "série" est en fait une somme finie).

$\left(\sum_{i=0}^{k-1} N^i\right)(I - N) = \sum_{i=0}^{k-1} N^i - \sum_{i=0}^{k-1} N^{i+1}$ (sommes télescopiques) $= I - N^k = I$

Donc $I - N$ est inversible et $(I - N)^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} N^i$.

Exercice 5

a) P est un polynôme annulateur de A donc $A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \ldots + a_1A + a_0I_n = 0_n$

$A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \ldots + a_1A = - a_0I_n$

$A(A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \ldots + a_1I_n) = - a_0I_n$

Comme $a_0 \neq 0$, $A\left(-\dfrac{1}{a_0}(A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \ldots + a_1I_n)\right) = I_n$

donc A est inversible et $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0}(A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \ldots + a_1I_n)$

b) Si $a_0 = 0$: $A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \ldots + a_1A = 0_n$

Supposons que A est inversible : $A^{-1}(A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \ldots + a_1A) = A^{-1}0_n$

$A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \ldots + a_1I_n = 0_n$

Donc le polynôme $X^{p-1} + a_{p-1}X^{p-2} + \ldots + a_1$ est un polynôme annulateur de A.

Ce polynôme est de degré $p - 1$.

Donc P n'est pas de degré minimal. Donc il y a contradiction. Donc A n'est pas inversible.