Chapitre 7 – Systèmes et matrices – Exercices niveau 2

Exercice 1 Soit a un réel donné. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de a, la matrice A est-elle inversible ? (trouvez deux méthodes)

Exercice 2 (Oral HEC 2014)

Soit D la matrice définie par : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AD = DA$.
2. En déduire les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^3 - 2M = D$.

Exercice 3 (Oral HEC 2013)

On rappelle l'égalité remarquable dans $\mathbb{R}$: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = 0$, $AB = BA$ et B inversible.
Montrer que A + B est inversible.

Exercice 4

1) Soit $x \in]-1;1[$. Rappeler l'expression de $\sum_{i=0}^{+\infty} x^i$.

2) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $N^k = 0$.
Montrer que I – N est inversible et exprimer son inverse en fonction des puissances de N.

Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle polynôme minimal de A le polynôme annulateur de A de degré minimum et de coefficient dominant égal à 1.
Si p est le degré de ce polynôme, celui-ci peut donc s'écrire

$$P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0$$

a) Montrer que si $a_0 \neq 0$, alors A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n.
b) Montrer que si $a_0 = 0$, alors A n'est pas inversible.