Chapitre 7 : Systèmes et Matrices – Feuille n°1

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes : (S_1) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$ (S_2) : $\{ 2x - 5y + z = 0$

Exercice 2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système (S_λ) : $\begin{cases} (5-\lambda)x - 3y = 0 \\ 6x + (-4-\lambda)y = 0 \end{cases}$

1) Pour quelles valeurs de λ ce système est-il de Cramer ?
2) Déterminer l'ensemble des solutions en fonction des valeurs de λ.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer en fonction de λ les solutions du système $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 4

A quelle(s) condition(s) sur a, b et c le système : $\begin{cases} 3x + 2y + z = a \\ x + y + 4z = b \\ x + 2y + 15z = c \end{cases}$ admet-il au moins une solution ?

Exercice 5

1) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $2P - (X+1)P' = 0$
2) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $P - XP' + P'' = X^2 - 1$

Exercice 6

Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si M commute avec A, alors M commute avec A^2.
2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = A$. Montrer que M et A commutent.

Exercice 8

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) a) Calculer $B^2 - 4B + 3I_3$.
b) Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1}.
3) Montrer que C est inversible et déterminer C^{-1}.