Chapitre 7 : Systèmes et matrices – Feuille n°2

Exercice 1

1) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice B non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = 0_2$.
Montrer que A n'est pas inversible (on pourra procéder par raisonnement par l'absurde).

2) Application : On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2.
b) En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Nous allons chercher les puissances de A de 3 manières différentes.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.

2) En remarquant que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, retrouver le résultat précédent.

3) a) Montrer qu'il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 2^{n-1}b_n & a_n \end{pmatrix}$.

b) Exprimer a_n puis b_n en fonction de n. En déduire l'expression de A^n.
4) La formule trouvée est-elle vraie pour $n = -1$?

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A l'aide d'une décomposition bien choisie, déterminer l'expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I_2$.
1) Calculer B^2, puis montrer que $\forall k \geq 1$, $B^k = 2^{k-1}B$.
2) En déduire l'expression de A^n pour $n \geq 1$.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.
1) Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$. En déduire un polynôme annulateur de A.

Soit $n \geq 1$. Par division euclidienne de X^n par $X^2 + X - 2$, on sait qu'il existe deux polynômes $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ tels que : (*) $X^n = (X^2 + X - 2)Q_n(X) + R_n(X)$, avec $\text{degré}(R_n(X)) \leq 1$.

2) En posant les divisions euclidiennes, déterminer $Q_3(X)$ et $R_3(X)$.
3) Déterminer les racines du polynôme $X^2 + X - 2$.
4) On note $R_n(X) = a_nX + b_n$. En évaluant l'égalité (*) avec des valeurs bien choisies, montrer que :

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ -2a_n + b_n = (-2)^n \end{cases}$$

En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
5) En déduire que $\forall n \geq 1$, $A^n = \dfrac{1-(-2)^n}{3} A + \dfrac{2+(-2)^n}{3} I_2$.
6) L'égalité est-elle encore vérifiée pour n=-1 ?