Chapitre 8 : Espaces vectoriels – Feuille n°1

Exercice 1

1) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM + MB = 0_2 \}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Soit $\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P - XP' = 0\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = -2M\}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4) On considère l'ensemble $\mathcal{E} = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{F} = \{P \in \mathcal{E} \ / \ P(1) = 0\}$
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.
5) a) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des matrices triangulaires. $\mathcal{F}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
b) L'ensemble des matrices inversibles forme-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
c) Donner des exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

1) Soit $\mathcal{F} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 0 \\ -\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 0 \end{array} \right. \right\}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et déterminer une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
2) Soit $\mathcal{G} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 3y + 2z = 0 \}$. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{G}$.
3) Soit $\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P - XP' = 0\}$. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
4) On considère l'ensemble $\mathcal{E} = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{F} = \{P \in \mathcal{E} \ / \ P(1) = 0\}$.
Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
5) Soit $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a + 2b & -a + b + 2c \\ b + c & 5a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels de l'exercice précédent.

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$.
Déterminer la forme générale d'une matrice de $\mathcal{E}$. En déduire une base de $\mathcal{E}$.

Exercice 5

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X + 1$, $P_2 = (X + 1)^2$.
On admet que la famille (P_0, P_1, P_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
1) Soit $P = (2X - 1)^2$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (P_0, P_1, P_2).
2) a) Soit $Q = X$. Déterminer les coordonnées de Q dans la base (P_0, P_1, P_2) sans résoudre de système.
b) Même question pour $R = X^2$.

Exercice 6

On considère la famille $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ de l'exercice précédent.
Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que la famille (A, B, C, D) forme une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.