Chapitre 8 : Espaces vectoriels – Feuille n°2

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique. On considère toujours la famille $\mathcal{C}$ des exercices 5 et 6 de la feuille n°1.

1) Donner la matrice A de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

2) Redémontrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice de la famille (A, B, C, D) dans la base $\mathcal{B}$.

2) (A, B, C, D) est-elle une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $e_1 = (1, -1)$, $e_2 = (2, -1)$.

1) Démontrer de deux manières différentes que (e_1, e_2) forment une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x - y, x + 3y) \end{cases}$.

a) Déterminer $u_1 = f(e_1)$ et $u_2 = f(e_2)$.

b) Déterminer la matrice de (u_1, u_2) dans la base (e_1, e_2).

Exercice 4

1) Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère les vecteurs $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Déterminer le rang de la famille (U_1, U_2, U_3).

2) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 5

Etudier rapidement l'inversibilité des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Déterminer le rang des matrices :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3/2 \\ -1 & 2 & 3/4 \\ 1 & -2 & -3/4 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.