

Chapitre 8 : Espaces vectoriels – Exercices niveau 2

Exercice 1

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définie sur $]0; +\infty[$.

Montrer que les fonctions $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = \ln(x)$ forment une famille libre de $\mathcal{F}$.

Remarque : Si une fonction est nulle, alors elle est nulle en tout point, sa dérivée est nulle, ses limites sont nulles, ...

Exercice 2 (d'après HEC 2015)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et F_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par $X, X^2, \dots, X^n$.

1. Vérifier que les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) = P(x)$ sont les polynômes constants.

2. Préciser les dimensions respectives de E_n et F_n .

3. Pour tout $P \in F_n$, on note Q le polynôme tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

a) Vérifier que $Q \in E_n$. Quelle relation existe-t-il entre les degrés de P et de Q ?

b) Soit Δ l'application de F_n dans E_n qui à tout $P \in F_n$ associe $Q = \Delta(P)$ où $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x+1) - P(x)$.

Déterminer un polynôme P vérifiant $\Delta(P) = X^3$.

En déduire la valeur des sommes $\sum_{k=1}^n k^3$ et $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^3$.

Exercice 3 (Oral HEC) Soit t un nombre réel et $A(t)$ la matrice $A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces matrices lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par produit matriciel

2) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $A(t)$ est inversible. Montrer que, dans ce cas, $A(t)^{-1}$ appartient encore à $\mathcal{M}$.

3) Résoudre l'équation $X^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right)$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}$.

4) Soit $C = A(-1)$. Déterminer C^n pour n entier naturel.