Chapitre 8 – Les espaces vectoriels

1. Notion d'espace vectoriel

On sait additionner deux réels, deux éléments de $\mathbb{R}^n$ deux matrices, deux polynômes, deux fonctions, deux suites, ...
De la même manière, on sait multiplier un réel par un réel, un élément de $\mathbb{R}^n$ ou une matrice par un réel, un polynôme par un réel, une fonction par un réel, ...
On va donner un cadre théorique général à ces cas particuliers.

Définition (intuitive) :

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble. Si on a défini dans $\mathcal{E}$ une **addition** et la **multiplication par un nombre réel**, on dit que $\mathcal{E}$ est un **espace vectoriel**.

Dans ce cas, les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{R}$ des **scalaires**.

Exemples d'espaces vectoriels :

_ **$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel** :

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a défini $X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ et $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

On peut identifier $\mathbb{R}^n$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On utilisera donc les notations $(x_1, \dots, x_n)$ ou $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

_ **$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel** : si $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a défini $A + B$ et λA.

_ **$\mathbb{R}[X]$** (ensemble des polynômes) et **$\mathbb{R}_n[X]$** (ensemble des polynômes de degré $\leq n$) sont des espaces vectoriels :
si $P = a_nX^n + \dots + a_1X + a_0$, $Q = b_nX^n + \dots + b_1X + b_0$ sont des polynômes, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a défini $P + Q = (a_n + b_n)X^n + \dots + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)$
et $\lambda P = (\lambda a_n)X^n + \dots + (\lambda a_1)X + \lambda a_0$. $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel.

_ l'ensemble des suites à valeurs réelles, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
_ si D est une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions définies sur D, noté $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$
_ l'ensemble des variables aléatoires sur un univers Ω …

2. Les sous-espaces vectoriels

2.1 Définition

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$.
Alors **$\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$** si :
(SE1) : $\mathbf{0} \in \mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F} \neq \emptyset$)
(SE2) : $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{F}, \forall \mathbf{X'} \in \mathcal{F}, \mathbf{X} + \mathbf{X'} \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ est stable par addition)
(SE3) : $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \mathbf{X} \in \mathbf{F}$ ($\mathcal{F}$ est stable par multiplication par un scalaire)

Remarques :
_ (SE2) et (SE3) sont équivalentes à : $\forall X \in \mathcal{F}, \forall X' \in \mathcal{F}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda X + X' \in \mathcal{F}$
_ Un sous-ensemble est en général défini comme l'ensemble des éléments qui vérifient une certaine propriété (en général une égalité). Il faut donc vérifier que si deux éléments vérifient la propriété, leur somme aussi, et le produit par un réel aussi.
_ Pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il suffit de trouver un contre-exemple pour une des trois conditions.

Exemple (Très classique) :
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{F} = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA \right\}$
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Propriété :

Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des **solutions d'un système linéaire homogène** forment un sous-espace vectoriel.

Remarques :
_ $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
_ Dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$… forment des sous-espaces vectoriels.
Par contre, l'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel
($f(x) = e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais $- f(x) = - e^x$ ne l'est pas).

2.2 Combinaison linéaire, sous-espaces engendrés.

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $X_1, \dots, X_n$ une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$.
soit $Y \in \mathcal{E}$: on dit que **Y est combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_n$** s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\mathbf{Y = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n}$$

Exemple :
Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, considérons les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Y est-elle combinaison linéaire de X_1 et X_2 ?

Définition – Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $X_1, \dots, X_n$ une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$.
L'ensemble des combinaisons linéaires de $X_1, \dots, X_n$ est un sous-espace vectoriel, appelé sous-espace vectoriel engendré par $X_1, \dots, X_n$, et noté **$\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$** ou $<X_1, \dots, X_n>$
Autrement dit,

$$\mathbf{Vect(X_1, \dots, X_n) = \{ \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \}}$$

Remarques :
_ Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, **chercher une famille génératrice** de $\mathcal{F}$, c'est chercher des vecteurs $X_1, \dots, X_n$ tels que $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$. Pour cela, si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des solutions d'une équation ou d'un système, il faut d'abord **résoudre l'équation** (ou le système), pour trouver la forme générale des solutions.
_ $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$ est un sous-espace vectoriel : donc ni un vecteur, ni une matrice !
_ Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$. Si on montre que **$\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$** alors on sait que **$\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel**.

Ex :

1) Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{F}$.

2) Soit $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-2b \\ 3a & 4b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$. Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{G}$.

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel, et $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$.
Si $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{Vect}(X_1, \dots X_{n-1}, \boldsymbol{\lambda X_n}) = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, \mathbf{X_n})$

Exemple : Soit $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right)$. Alors on a $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ $(\times 6)$

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel, et $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$.
Si **X_n est combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_{n-1}$**, alors
$\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n) = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_{n-1})$

Exemple : Soit $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

3. Bases

3.1 Famille libre

Rappel :
Soit X_1 et X_2 deux vecteurs d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$.
On dit que X_1 et X_2 sont **colinéaires** s'il existe un réel λ tel que $X_2 = \lambda X_1$ ou $X_1 = \lambda X_2$.

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $X_1, \dots, X_n$ une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$.

Si, pour $(a_1, .., a_n)$ $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{a_1X_1 + \dots + a_nX_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ \dots \\ a_n = 0 \end{cases}}$,

on dit que la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est une **famille libre**.

"La seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire où tous les coefficients sont nuls "
"il n'y a pas de relation linéaire entre les vecteurs (autre que la relation triviale 0 = 0)"

Propriété :

_ **UN** vecteur est libre si et seulement s'il est **non nul**
_ **DEUX** vecteurs forment une famille libre si et seulement s'ils **ne sont pas colinéaires**.

Remarque : pour $n \geq 3$, il faut utiliser la définition.

Exemples :

1) Soit $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. La famille (U_1, U_2) forme-t-elle une famille libre ?

2) La famille $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ forme-t-elle une famille libre ?

Propriété :

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de vecteurs de E.
Si **$(X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre** et si $\mathbf{p \leq n}$, alors **$(X_1, \dots, X_p)$ est une famille libre**.

(Une sous-famille d'une famille libre est une famille libre).

3.2 Définition d'une base

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$.
Alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de E si et seulement si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille **libre et génératrice de $\mathcal{E}$.**

Remarques :
_ si $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, et si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathcal{F}$,
$(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{F}$ si c'est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}$.

_ Pour déterminer une base d'un sous-espace vectoriel, il faut d'abord trouver une famille génératrice, (écrire $\mathcal{F}$ = Vect(…)), puis vérifier qu'elle est libre (ou la transformer en famille libre).

Ex : Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-2b \\ 3a & 4b \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$. Déterminer une base de $\mathcal{F}$.

Définition :

Soit $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ une base d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$. Soit $Y \in \mathcal{E}$.
Alors Y s'écrit de manière unique sous la forme $\mathbf{Y = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n}$.
$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont appelées les **coordonnées de Y dans la base $\mathcal{B}$.**

Remarque : Attention, les coordonnées de Y dépendent de la base choisie !

Exemple : Dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: soit $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
On admet que $\mathcal{B} = (U_1, U_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{B}' = (V_1, V_2)$ en est une autre.
Soit $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de Y dans la base $\mathcal{B}$, et dans la base $\mathcal{B}'$.

Remarque :
Les coordonnées dans une base sont uniques. Si on voit le résultat sans faire de calcul, tant mieux !

3.3 Bases canoniques

Définition – Propriété : **Base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**

Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: soit $\mathbf{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $\mathbf{E_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(E_i : 1 à la i-ème place, 0 ailleurs pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$).

$(E_1, \dots, E_n)$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, appelée base canonique.

Si $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors les coordonnées de X dans la base canonique sont : $\mathbf{(x_1, \dots, x_n)}$.

Remarque :
De même, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $e_1 = (1,0, \dots,0) \dots e_n = (0, \dots, 0, 1)$

Exemple :

Base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

Soit $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Coordonnées de X dans la base (E_1, E_2, E_3) :

Définition – Propriété : **Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$**

Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots \\ 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$ pour $i \in \{1,..,n\}$, $j \in \{1,..,p\}$.

(1 pour le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ème colonne, 0 sinon)

La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq p}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée base canonique.

Ex : Base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Définition – Propriété : **Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.**

Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\mathbf{e_0 = 1, e_1 = X, \dots, e_n = X^n}$. ($\forall\, i \in \{0, \dots, n\}$, $e_i = X^i$)

La famille $(e_0, \dots, e_n)$ forme une base, appelée base canonique.

Si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, P a pour coordonnées $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ dans la base canonique.

Ex :
Base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

Soit $P = 3X^2 - 2X + 1$
Les coordonnées de P dans la base canonique sont :

4. Dimension

4.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel.
Si $\mathcal{E}$ admet une base constituée d'un nombre fini de vecteurs, on dit que $\mathcal{E}$ est de **dimension finie**.

Exemples :
D'après le paragraphe précédent, $\mathbb{R}^n$, $M_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont de dimension finie.
Par contre, on peut montrer que $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ne sont pas de dimension finie.

Propriété – Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie.
Alors **toutes les bases de $\mathcal{E}$ ont le même cardinal**.
Ce cardinal commun est appelé **dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.**

D'après les bases canoniques vues dans le paragraphe précédent, on a en particulier :

Propriété :

$\mathbb{R}^n$ et **$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$** sont de dimension **n**.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension **n.p**
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension **n^2**.
$\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension **n + 1**.

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace de **dimension n**. Alors :
_ toute famille libre de $\mathcal{E}$ a au plus n éléments.
_ toute famille libre de $\mathcal{E}$ de n éléments est une base
_ toute famille génératrice de $\mathcal{E}$ a au moins n éléments.
_ toute famille génératrice de $\mathcal{E}$ de n éléments est une base.

Remarque :
Dans un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n, pour montrer qu'une famille est une base, on montre d'abord que **la famille est libre**, puis que **son cardinal est égal à la dimension de $\mathcal{E}$.**

Ex : soit $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que (U_1, U_2) forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

4.2 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie, et soit $\mathcal{F}$ **un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$**.
Alors $\mathcal{F}$ est de dimension finie et **$\dim(\mathcal{F}) \leq \dim(\mathcal{E})$**.
De plus **$\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{E})$ si et seulement si $\mathcal{F} = \mathcal{E}$**.

Remarques :
_ {0} est le seul sous-espace vectoriel de dimension 0.
_ un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé une droite vectorielle.

Ex : Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

4.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $X_1, \dots, X_n$ n vecteurs de $\mathcal{E}$.
On appelle **rang de la famille $(X_1, \dots, X_n)$, la dimension de $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$**.

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $X_1, \dots, X_n$ n vecteurs de $\mathcal{E}$.
si $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre, alors $\mathrm{rang}(X_1, \dots, X_n) = n$.

Démonstration :
si $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille libre, alors c'est une famille à la fois libre et génératrice de $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$, donc une base. Donc $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n)$ est de dimension n.
Donc $\mathrm{rang}(X_1, \dots, X_n) = n$

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $X_1, \dots, X_n$ n vecteurs de $\mathcal{E}$.
Si X_n est une combinaison linéaire de $(X_1, \dots, X_{n-1})$, alors $\mathrm{rang}(X_1, \dots, X_n) = \mathrm{rang}(X_1, \dots, X_{n-1})$.

Démonstration : Evident, car à cette condition, $\mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_n) = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_{n-1})$.

Ex : Déterminer le rang de la famille $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Matrices et bases

Dans toute cette partie, on considère un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension finie.

5.1 Matrice d'une famille dans une base

Définition :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$.
Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathcal{E}$.
On appelle matrice de la famille $(f_1, \dots, f_p)$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f_1, \dots, f_p$ dans la base $e_1, \dots, e_n$.

$$\mathbf{M}_{(e_1, \dots, e_n)}(\mathbf{f_1, \dots, f_p}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \mathbf{f_1} & \dots & \mathbf{f_p} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{e_1} \\ \dots \\ \mathbf{e_n} \end{array} \end{array}$$

Exemples :

1) Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: Soit $\mathcal{B}$ la base canonique et $f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer $M_{\mathcal{B}}(f_1, f_2, f_3)$.

2) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique. Soit $P = X - 2$, $Q = (X + 1)^2$, $R = -3$.
Déterminer $M_{\mathcal{B}}(P, Q, R)$.

Remarque :
De manière générale : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A (qui sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Alors A est la matrice de la famille $(C_1, \dots, C_n)$ dans la base canonique.

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$.
Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathcal{E}$.
Alors **$(f_1, \dots, f_n)$ forme une base de $\mathcal{E}$** si et seulement si **$M_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n)$ est inversible**.

Exemple :
Suite de l'exemple 1 : La famille (f_1, f_2, f_3) forme-t-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

Remarques :
_ Dans un espace vectoriel de dimension n, on sait qu'une famille de n vecteurs forme une base si et seulement si elle forme une famille libre.
_ Une matrice carrée est donc **inversible** si et seulement si **ses colonnes forment une famille libre**.

Ex : Soit B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. B est-elle inversible ?

5.2 Rang d'une matrice

Définition :

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de M. (vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).
Le **rang de M** est le **rang de la famille des vecteurs colonnes** $(C_1, \dots, C_p)$.

Ex : A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A.

Propriété :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors **M est inversible** si et seulement si **rang(M) = n**.

Démonstration :
M est inversible si et seulement si ses n vecteurs colonnes forment une base, c'est-à-dire sont de rang n.

Propriété (admise) :

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors **rang($^tM$) = rang(M)**.

Corollaire : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors M est inversible si et seulement si ^tM est inversible.

Démonstration :
M est inversible $\Leftrightarrow$ rang(M) = n $\Leftrightarrow$ rang(^tM)= n $\Leftrightarrow$ ^tM est inversible.

Propriété :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors le rang de M est égal au rang de l'image de M par une succession d'opérations (autorisées) sur les colonnes (ou sur les lignes).

Ex : rang de M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$?