

Chapitre 9 : Applications linéaires

1. Applications linéaires, noyau, image

1.1 Définitions

Définition :

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels. Soit f une application de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.

On dit que **f est une application linéaire** si :

$$\forall (X, X') \in \mathcal{E}^2, f(X + X') = f(X) + f(X')$$

$$\forall X \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda.X) = \lambda.f(X).$$

Remarque :

Les deux conditions peuvent être remplacées par :

$$\forall X \in \mathcal{E}, \forall X' \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda.X + X') = \lambda.f(X) + f(X')$$

Propriété

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ vers un espace vectoriel $\mathcal{F}$.

Alors :

$$_ f(0_{\mathcal{E}}) = 0_{\mathcal{F}}$$

$$_ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{E}^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$f(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 f(X_1) + \dots + \lambda_n f(X_n).$$

(l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images)

Principe de la démonstration :

_ la deuxième condition de la définition avec $\lambda = 0$ donne : $\forall X \in \mathcal{E}, f(0.X) = 0.f(X)$ donc $f(0) = 0$

_ la deuxième partie se démontre par récurrence

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels.

_ une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans **lui-même** est appelée un **endomorphisme**.

_ une application linéaire **bijective** de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ est appelée un **isomorphisme**.

_ un **endomorphisme bijectif** de $\mathcal{E}$ est appelée un **automorphisme**.

Exemple :

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto X^2 P' - P \end{cases}$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X], f(P + Q) = X^2(P + Q)' - (P + Q) = X^2 P' + X^2 Q' - P - Q = X^2 P' - P + X^2 Q' - Q = f(P) + f(Q).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda P) = X^2(\lambda P)' - \lambda P = X^2 \lambda P' - \lambda P = \lambda(X^2 P' - P) = \lambda f(P).$$

Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Attention, pour montrer que f est un **endomorphisme de $\mathcal{E}$** , il faut parfois montrer que $\forall X \in \mathcal{E}, f(X) \in \mathcal{E}$.
(en plus de montrer la linéarité)

Autres exemples : La limite d'une suite convergente, l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, la dérivée d'une fonction dérivable, l'espérance d'une VAR finie... sont des applications linéaires.

1.2 $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$

Dans toute cette partie, on considère deux espaces vectoriels $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Définition :

L'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est noté $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{E}$ est noté $\mathcal{L}(\mathcal{E})$.

Notation :

Notons $\mathbf{0}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} : \begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \\ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{0} \end{cases}$ $\mathbf{0}_{\mathcal{E}} : \begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \\ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{0} \end{cases}$ $\text{id}_{\mathcal{E}} : \begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \\ \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x} \end{cases}$

Propriété :

$\mathbf{0}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

$\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \forall g \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}), f + g \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. ("la somme de 2 applications linéaires est une application linéaire")

$\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Autrement dit, $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est un espace vectoriel (sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$)

Propriété :

– $\text{id}_{\mathcal{E}} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ ($\text{id}_{\mathcal{E}}$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$)

– soit $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ trois espaces vectoriels. $\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \forall g \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G}), g \circ f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ (**la composée de deux applications linéaires est une application linéaire**, et en particulier la composée de deux endomorphismes est un endomorphisme).

– $\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, si f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$. (**si elle existe, la réciproque d'une application linéaire est une application linéaire**)

1.3 Noyau et image

Définition :

Soit f une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

On appelle noyau de f , noté $\text{Ker } f$, l'ensemble des antécédents de $\mathbf{0}_{\mathcal{F}}$ par f .

$$\text{Ker } f = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E} \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathcal{F}}\}$$

On appelle image de f , noté $\text{Im } f$, l'ensemble des images par f des éléments de $\mathcal{E}$.

$$\text{Im } f = \{f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{E}\} = \{y \in \mathcal{F} \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{E}, y = f(\mathbf{x})\}.$$

Propriété :

Soit f une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Alors **$\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, et $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.**

Propriété :

Soit f est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$ alors :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Remarque :

– Pour trouver $\text{Ker } f$: on résout l'équation $f(X) = 0$

– Pour trouver $\text{Im } f$:

– $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathcal{E}$.

– on cherche à quelle(s) condition(s) sur Y , l'équation $f(X) = Y$ admet **au moins** une solution.

Exemple :

Soit $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ -x/2 + y \end{pmatrix}$.

1) Déterminer une base de $\text{Ker } f$.

2) a) Déterminer une base de $\text{Im } f$.

b) Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. A quelle condition $Y \in \text{Im}(f)$?

$$1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x/2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \end{matrix}$$

On prend y comme inconnue secondaire : $x = 2y$

$$\text{Ker } f = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, donc forme une famille libre, donc une base de $\text{Ker}(f)$.

2) a) Base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \times 0 \\ -1/2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } \text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \text{Im}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

b) On cherche à quelle(s) condition(s) le système $f(X) = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = a \\ -x/2 + y = b \end{cases}$ admet une ou des solutions.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = a \\ 0 = a + 2b \end{cases} \text{ admet des solutions si et seulement si } 0 = a + 2b$$

$$\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} / a + 2b = 0 \right\}$$

$$(\text{Cohérence : } a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b \text{ Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right))$$

Rappel :

Soit A et B deux ensembles et f une application de A dans B .

On dit que f est **injective** si tout élément de B admet **au plus un antécédent** par f .

(pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution)

On dit que f est **surjective** si tout élément de B admet **au moins un antécédent** par f .

(pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution)

On dit que f est **bijjective** si f est **injective et surjective** (tout élément de B admet un et un seul antécédent par f , pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution).

Propriété :

Soit f une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Alors :

– f est **injective** si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_{\mathcal{E}}\}$

– f est **surjective** si et seulement si $\text{Im } f = \mathcal{F}$.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, f est-elle injective ? surjective ?

$\text{Ker } f = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

$\text{Im } f = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc de dimension 1 et $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ donc $\text{Im } f \neq \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donc f n'est pas surjective.

(ou : $\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) / a + 2b = 0 \right\} \neq \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$)

2. Applications linéaires en dimension finie

Dans toute cette partie, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

2.1 Rang d'une application linéaire

Définition :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.

On appelle **rang de f** la **dimension de $\text{Im } f$** .

Remarque :

On sait que, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathcal{E}$, alors $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Donc le rang de f est le rang de la famille $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

Théorème du rang :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.

Alors **$\dim(\text{Ker } f) + \text{rang}(f) = \dim(\mathcal{E})$** .

($\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathcal{E})$).

Remarque :

Si on trouve $\text{Ker } f$ et sa dimension, on peut en déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.

Il suffit de trouver une famille libre de $\text{Im}(f)$ de cardinal $\dim(\text{Im}(f))$ pour trouver une base de $\text{Im}(f)$.

(un élément de $\text{Im}(f)$ est de la forme $f(x)$, où $x \in \mathcal{E}$).

Exemple :

Dans l'exemple précédent, on a trouvé : $\text{Ker } f = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. En déduire la dimension et une base de $\text{Im}(f)$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul donc forme une base de $\text{Ker}(f)$ donc $\dim(\text{Ker } f) = 1$

$\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ donc par le théorème du rang $\dim(\text{Im}(f)) = 2 - 1 = 1$.

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$. $f(e_1)$ est non nul donc c'est une famille libre, donc une base de $\text{Im}(f)$.

Propriété : Endomorphisme en dimension finie

Soit $\mathcal{E}$ un espace de **dimension finie** n et f un **endomorphisme** de $\mathcal{E}$.

Les affirmations suivantes sont **équivalentes** :

- (1) f est **bijective**
- (2) f est **injective**
- (3) **$\text{rang}(f) = n$**
- (4) f est **surjective**

Démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (2) si f est bijective, alors f est injective par définition

(2) $\Rightarrow$ (3) : si f injective $\text{Ker } f = \{0\}$ donc $\dim(\text{Ker } f) = 0$

D'après le théorème du rang $\text{rang}(f) = n - \dim(\text{Ker}(f)) = n$

(3) $\Rightarrow$ (4) : si $\text{rang}(f) = n$ $\dim(\text{Im}(f)) = n = \dim(\mathcal{E})$

$\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de même dimension que $\mathcal{E}$, donc $\text{Im } f = \mathcal{E}$ donc f est surjective.

(4) $\Rightarrow$ (1) si f est surjective $\dim(\text{Im}(f)) = n$

D'après le théorème du rang $\dim(\text{Ker}(f)) = n - \dim(\text{Im}(f)) = n - n = 0$ donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Donc f est injective. Donc f est bijective.

Exemple :

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:
$$\begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x - y \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Déterminer $\text{Ker}(f)$. f est-elle un automorphisme ?

$$f(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 0 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ donc } f \text{ est injective.}$$

Comme f est un endomorphisme en dimension finie, f est donc bijective : c'est un automorphisme.

Remarque :

Attention, si $\mathcal{E}$ n'est pas de dimension finie, un endomorphisme peut être injectif sans être surjectif ou inversement.

Ex : On peut montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto P' \end{cases}$ est surjective, mais n'est pas injective.

En effet $\text{Ker}(f) = \{\text{polynômes constants}\}$ donc f n'est pas injective

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$: $Q = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

Posons $P = \frac{1}{n+1} a_n X^{n+1} + \frac{1}{n} a_{n-1} X^n + \dots + \frac{1}{2} a_1 X^2 + a_0 X$.

Alors $f(P) = Q$.

Donc f est surjective.

2.2 Matrice d'une application linéaire

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ un espace vectoriel de dimension p .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$, et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de $\mathcal{F}$.

Soit u une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

On appelle **matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice de la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ dans la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$.

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} u(e_1) & \dots & u(e_n) \\ \hline & & \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ \dots \\ f_p \end{matrix}$$

Exemple :

$$\text{Soit } u : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -4x + 5y \\ 3y \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ \hline \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Propriété : Ecriture matricielle d'une application linéaire

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels. Soit $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ une base de $\mathcal{F}$.

Soit u une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Soit $x \in \mathcal{E}$. On pose $y = u(x)$.

Si on note $\mathbf{X} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$ $\mathbf{Y} = \mathbf{M}_{\mathcal{C}}(\mathbf{y})$ et $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ alors $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$

Exemple :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $x = (2; 3)$. Déterminer $f(x)$.

Notons $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($\mathbf{X}$ est la matrice de x dans la base canonique).

$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ($\mathbf{Y}$ est la matrice de $f(x)$ dans la base canonique) donc $f(x) = (1; 5)$.

Propriété :

Soit f une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

S'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), f(X) = M.X$, alors :

– f est une application linéaire

– la matrice de f dans les bases canoniques est M .

Ex : Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 3y \\ -x + y \\ 3y \end{pmatrix} \end{cases}$. Montrer que f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et

déterminer sa matrice dans les bases canoniques.

Alors $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Donc f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

et la matrice de f dans les bases canoniques est : $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition :

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'**application linéaire canoniquement associée à M** est l'application

$f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), f(X) = MX$.

(c'est l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est M)

2.2 Matrice d'un endomorphisme

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n .

Définition :

Soit f un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$.

On appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}$** la matrice de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \quad (\text{attention, c'est la même base au départ et à l'arrivée !})$$

Exemples :

$$1) \text{ Soit } f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -4x + 5y \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Soit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On voit facilement que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

$$a) f(e_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

$$b) f(u_1) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \quad f(u_2) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3u_2$$

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} f(u_1) & f(u_2) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}.$$

$$2) \text{ Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ P \longmapsto P + (X-1)P' \end{cases}. \text{ Soit } \mathcal{B} = (e_0, e_1) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}_1[X].$$

Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

$$(e_0 = 1 \text{ et } e_1 = X)$$

$$f(e_0) = 1 + 0 = e_0 \quad f(e_1) = X + X - 1 = 2X - 1 = -e_0 + 2e_1. \quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_0) & f(e_1) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \end{matrix}.$$

Définition :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'**endomorphisme canoniquement associée à M** est l'application

$f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), f(X) = MX$.

(c'est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M)

Exemple : Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Soit g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé.

$$\text{Alors } \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

2.3 Opérations sur les matrices carrées

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{E}$
 Soit f et g deux endomorphismes de $\mathcal{E}$. Alors :
 $f = g$ si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(g)$.

Remarque :

Une fois que les bases sont choisies, il est donc équivalent de travailler sur l'endomorphisme ou sur sa matrice. Attention à bien choisir la base !

Définition :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$.
 On note : $f^0 = \text{id}_{\mathcal{E}}$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, ..., $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension p . Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{E}$.
 Soit f et g deux endomorphismes de $\mathcal{E}$, λ un réel et n un entier naturel.

- _ $M_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{E}}) = 0_p$
- _ $M_{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathcal{E}}) = I_p$
- _ $M_{\mathcal{B}}(f + g) = M_{\mathcal{B}}(f) + M_{\mathcal{B}}(g)$
- _ $M_{\mathcal{B}}(\lambda f) = \lambda \times M_{\mathcal{B}}(f)$.
- _ $M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g) \times M_{\mathcal{B}}(f)$.
- _ $M_{\mathcal{B}}(f^n) = (M_{\mathcal{B}}(f))^n$
- _ f est **bijective** si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(f)$ est **inversible**. Dans ce cas, $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$

Exemple : Soit $f \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2y \end{pmatrix} \end{cases}$.

1) f est-elle un automorphisme ?

2) Montrer que $f^2 - 3f + 2\text{id}_{\mathcal{E}} = 0_{\mathcal{E}}$.

f a pour matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire et à coefficients diagonaux non nuls, donc est inversible.

Donc f est bijective (c'est un automorphisme).

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2 \quad \text{Donc } f^2 - 3f + 2\text{id}_{\mathcal{E}} = 0_{\mathcal{E}}.$$

Remarque :

On peut généraliser les propriétés précédentes pour des applications linéaires (sauf pour l'identité et la puissance qui n'ont un sens que pour des endomorphismes)

Propriété : rang d'une matrice / d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$, et $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{E}$.

On note $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors le rang de f est égal au rang de $\mathbf{M}$.

Démonstration :

$$\text{rang}(\mathbf{M}) = \text{rang}(\text{vecteurs colonnes}) = \text{rang}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

$$= \dim(\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))) = \dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(f).$$

3. Changement de base

3.1 Matrice de passage

Définition : **Matrice de passage**

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension n .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de $\mathcal{E}$.

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice, notée $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ définie par :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathbf{M}_{(e_1, \dots, e_n)}(e'_1, \dots, e'_n) = \begin{pmatrix} e'_1 & \dots & e'_n \\ \vdots & & \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

Remarque :

D'après le chapitre précédent, on sait que, comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathcal{E}$, $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible.

Exemple :

Dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, soit $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On sait que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (deux vecteurs non colinéaires, $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$).

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Déterminer P .

$$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriété :

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathcal{E}$. Alors $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

Propriété : **Changement de base pour un vecteur**

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathcal{E}$. Soit $x \in \mathcal{E}$.

Si on note $\begin{cases} X = M_{\mathcal{B}}(x) \\ X' = M_{\mathcal{B}'}(x) \end{cases}$, alors $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$
 $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$

Exemple : Suite de l'exemple précédent :

On admet que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$.

$$X = M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Soit } X' = M_{\mathcal{B}'}(x). \text{ Alors } X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix} \quad x = 11u_1 - 8u_2.$$

3.2 Changement de base pour un endomorphisme

Propriété : Formule de changement de base pour un endomorphisme

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n .

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathcal{E}$.

$$\text{Si } \begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f) \\ \mathbf{A}' = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}(f) \end{cases} \text{ alors } \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}'\mathbf{P}^{-1} \text{ et } \mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

Attention, propriété TRES IMPORTANTE !

Exemple :

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -4x + 5y \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a vu que } \mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exprimer la matrice $\mathbf{A}$ en fonction de $\mathbf{A}'$.

$$\text{On a : } \mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f) \text{ et } \mathbf{A}' = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}(f). \text{ Soit } \mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de changement de base : $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{A}'\mathbf{P}^{-1}$.

Définition :

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont **semblables** s'il existe une matrice $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}.$$

Remarque :

Deux matrices sont semblables si ce sont les matrices d'un **même endomorphisme** dans deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3.3 Applications de la formule de changement de base

Remarques :

_ une égalité matricielle est équivalente à une égalité obtenue en **multipliant à gauche ou à droite** par une **matrice inversible**.

_ on a donc : $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$

Démonstration : $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} \text{ (}\times\mathbf{P}^{-1} \text{ à gauche, } \times\mathbf{P} \text{ à droite)}$
 $\Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$

Méthode :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Supposons qu'à l'aide de la formule de changement de base, on trouve : $A = \mathbf{PBP}^{-1}$, avec $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si le changement de base est intéressant (voir chapitre réduction), B est plus simple que A (diagonale ou triangulaire).

Les exemples seront la suite de l'exemple précédent :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \mathbf{PA}'\mathbf{P}^{-1}, \text{ avec } A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ On admet que } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Calcul de l'inverse de A :**

Rappel :

Soit B et C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si les matrices B et C sont inversibles, alors la matrice BC est inversible et $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$.

Méthode :

On suppose que $A = \mathbf{BPB}^{-1}$, avec P inversible. (et donc P^{-1} aussi).

Si B est inversible, alors A est inversible comme produit de matrices inversibles et

$$A^{-1} = (\mathbf{BPB}^{-1})^{-1} = (\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{PB}^{-1}\mathbf{P}^{-1}. \text{ (à redémontrer à chaque fois)}$$

Exemple : (avec l'exemple précédent).

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

$A = \mathbf{PA}'\mathbf{P}^{-1}$ avec $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. A' est inversible donc A est inversible comme produit de matrices inversibles

$$\text{et } A^{-1} = (\mathbf{PA}'\mathbf{P}^{-1})^{-1} = (\mathbf{P}^{-1})^{-1}\mathbf{A}'^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}(\mathbf{A}')^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Remarque :

A et B sont semblables, donc représentent le même endomorphisme u (dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$).

Donc A et B sont inversibles si et seulement si u est bijectif.

Donc A est inversible si et seulement si B est inversible.

Dans ce cas, on a : $A^{-1} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}}(u^{-1})$ et $B^{-1} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'}(u^{-1})$.

Donc d'après la formule de changement de base, $A^{-1} = \mathbf{P} \cdot B^{-1} \cdot \mathbf{P}^{-1}$

- **Calcul de A^n :**

Propriété : A retenir, mais à redémontrer à chaque fois :

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, inversible.

Si $A = P.B.P^{-1}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P.B^n.P^{-1}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} _ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n &= (PBP^{-1})^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1}) \\ &= PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B\dots B(P^{-1}P)BP^{-1} \\ &= PB^nP^{-1} \end{aligned}$$

_ ou, plus proprement par récurrence

_ ou : A et B sont semblable donc représentent un même endomorphisme u dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On a alors : $M_{\mathcal{B}}(u^n) = A^n$ et $M_{\mathcal{B}'}(u^n) = B^n$

D'après la formule de changement de base, appliquée à u^n , on a donc : $A^n = PB^nP^{-1}$.

Ex : (suite de l'exemple précédent). Déterminer l'expression de A^n .

$$\begin{aligned} A &= PA'P^{-1} \text{ donc } A^n = PA'^nP^{-1} \text{ et } A'^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}. \\ A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ 1 & 2 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3^n & -1 + 3^n \\ 2 - 2 \times 3^n & -1 + 2 \times 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque : **Changement de base et polynôme de matrice**

On suppose toujours que $A = P.B.P^{-1}$.

Soit $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$, de la forme $Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

$$\begin{aligned} \text{Alors } Q(A) &= a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_2 \\ &= a_n P.B^n.P^{-1} + a_{n-1} P.B^{n-1}.P^{-1} + \dots + a_1 P.B.P^{-1} + a_0 P.I_2.P^{-1} \\ &= P (a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_1 B + a_0 I_2) P^{-1} \\ &= P.Q(B).P^{-1} \end{aligned}$$

- **Equations matricielles :**

Méthode :

On cherche à résoudre une équation d'inconnue M .

_ on pose, par exemple $N = P^{-1}MP$, on obtient une **équation dans l'inconnue secondaire N** , qui est en général plus simple.

_ on **résout l'équation en N** (à l'aide de **coefficients indéterminés** très souvent)

_ on **résout l'équation en M** (à l'aide de $M = PNP^{-1}$).

Exemple : (suite de l'exemple précédent).

On cherche à résoudre l'équation $AM = M$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que $AM = M \Leftrightarrow A'N = N$.

2) Résoudre l'équation $A'N = N$, d'inconnue $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) En déduire une base de l'ensemble des solutions de l'équation $AM = M$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1) $N = P^{-1}MP$ donc $M = PNP^{-1}$.

Donc $AM = M \Leftrightarrow PA'P^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}$

$$\Leftrightarrow PANP^{-1} = PNP^{-1}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}ANP^{-1}P = P^{-1}PNP^{-1}P \quad (\times P^{-1} \text{ à gauche, } \times P \text{ à droite})$$

$$\Leftrightarrow A'N = N$$

2) Posons $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A'N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \quad A'N = N \Leftrightarrow \begin{cases} 3c = c \\ 3d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3) \text{ donc } M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b & -a + b \\ 2a - b & -a + b \end{pmatrix}.$$

$$\text{donc } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - b & -a + b \\ 2a - b & -a + b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les deux matrices sont non colinéaires, donc forment une base de $\mathcal{S}$.