Exercice 1

1) Soit u et v deux suites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta(u + v)_n = (u_{n+1} + v_{n+1}) - (u_n + v_n) = (u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n) = \Delta(u)_n + \Delta(v)_n.$$

Donc $\Delta(u + v) = \Delta(u) + \Delta(v)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta(\lambda u)_n = (\lambda u_{n+1}) - (\lambda u_n) = \lambda(u_{n+1} - u_n) = \lambda \Delta(u)_n \text{ donc } \Delta(\lambda u)_n = \lambda \Delta(u)_n.$$

Donc Δ est un endomorphisme de E .

2) $u \in \text{Ker}(\Delta) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \Delta(u)_n = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0 \Leftrightarrow u$ est une suite constante.

$\Leftrightarrow$ il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = c$.

$\text{Ker}(\Delta) = \{u_n = c \forall n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}\}$. $\text{Ker}(\Delta) \neq \{0\}$ donc Δ n'est pas injective.

3) Soit $w \in E$. Après tâtonnements, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} w_k$.

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^n w_k - \sum_{k=0}^{n-1} w_k = w_n \text{ donc } \Delta(u) = w.$$

b) Donc, pour tout $w \in E$, w admet un antécédent par Δ . Donc Δ est surjective. (*on retrouve qu'en dimension infinie, un endomorphisme peut être surjectif, et pas injectif.*)

$$4) a) \forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \Delta^2(u)_n = \Delta(\Delta(u))_n = \Delta(u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n)$$

$$\Delta^2(u)_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n.$$

$$b) u \in \text{Ker}(\Delta^2) \Leftrightarrow \Delta^2(u) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

(u_n) est une suite linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Equation caractéristique :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Donc il existe λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu)1^n = \lambda n + \mu = \mu a_n + \lambda b_n$. Donc $u = \mu a + \lambda b$.

$$\text{Ker}(\Delta^2) = \{ \mu a + \lambda b, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(a, b).$$

5. a) _ la suite nulle est une suite arithmétique de raison 0, donc elle appartient à A .

_ si (u_n) et (v_n) sont deux suites arithmétiques de raison r et r' , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + v_{n+1} = (u_n + r) + (v_n + r') = (u_n + v_n) + (r + r') \text{ donc la suite } u + v \text{ est arithmétique de raison } r + r'.$$

On peut montrer de même que si u est arithmétique de raison r , et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λu est arithmétique de raison λr . Donc A est un sous-espace vectoriel de E .

$$b) \text{ Si } u \in A : \text{ il existe } r \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r \text{ donc } u_{n+1} - u_n = r \quad \Delta(u)_n = r a_n$$

$$\Delta(u) = r a \text{ donc } \Delta(u) \in \text{Vect}(a).$$

$$\text{Inversement, si } v \in \text{Vect}(a) : \text{ il existe } r \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, v = r a \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = r.$$

$$\text{Alors en posant : } u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} r = r n \text{ alors } u \in A \text{ et } \Delta(u) = v. \quad \text{Conclusion } \Delta(A) = \text{Vect}(a).$$

Exercice 2 1) a) Si $af_1 + bf_2 = 0 : \forall x \in \mathbb{R}, ae^{\alpha x} + bxe^{\alpha x} = 0$.

En particulier pour $x = 0 : a = 0$ donc $bxe^{\alpha x} = 0$.

En particulier pour $x = 1 \quad be^{\alpha} = 0$ donc $b = 0$. Donc $B = (f_1, f_2)$ est une famille libre, donc une base de $E = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

$$b) \text{ Si } f \in E : f = af_1 + bf_2 \quad f(x) = ae^{\alpha x} + bxe^{\alpha x}$$

$$\text{Alors } f'(x) = a\alpha e^{\alpha x} + b(e^{\alpha x} + x\alpha e^{\alpha x}) = (\alpha a + b)e^{\alpha x} + x(b\alpha)e^{\alpha x} \text{ Donc } \Delta(f) = (\alpha a + b)f_1 + \alpha b f_2 \in E.$$

De plus, on sait que la dérivée est linéaire. Donc d est un endomorphisme de E .

$$f_1'(x) = \alpha e^{\alpha x} \quad f_2'(x) = e^{\alpha x} + x\alpha e^{\alpha x} \text{ donc } A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

c) A est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale (car $\alpha \neq 0$), donc A est inversible. Donc Δ est bijectif.

$$2) \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow \alpha L_1 - L_2 \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\alpha & -1/\alpha^2 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{\alpha^2} L_1 \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_2 \quad \text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & -1/\alpha^2 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}.$$

$$f \in E \text{ et } M_B(f) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } M_B(\Delta^{-1}(f)) = A^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc les primitives de f sont de la forme $-2f_1 - f_2 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$3) \text{ a) } A = \alpha I + B \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \alpha I \text{ commute avec toutes les matrices, donc avec } B.$$

De plus $B^2 = 0$, donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (\alpha I + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha I)^{n-k} B^k = \binom{n}{0} (\alpha I)^n B^0 + \binom{n}{1} (\alpha I)^{n-1} B^1 = \alpha^n I + n \alpha^{n-1} B = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } M_B(f^{(n)}) = M_B(\Delta^n(f)) = A^n \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \alpha^n + 2n \alpha^{n-1} \\ 2\alpha^n \end{pmatrix} \quad f^{(n)} = (-3 \alpha^n + 2n \alpha^{n-1})f_1 + 2 \alpha^n f_2.$$

Exercice 3 1) soit $x \in \text{Ker } f : f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \text{Ker } f^2 \quad \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$

2) Soit $x \in \text{Im } f^2$: il existe $y \in E$ tel que $x = f(f(y))$ avec $z = f(y) \quad x = f(z)$ donc $x \in \text{Im } f$.

3) soit $x \in \text{Im } f$: il existe y tel que $x = f(y) \quad \text{donc } f(x) = f(f(y)) = f^2(y) = 0$. Donc $x \in \text{Ker } f$.

Exercice 4 (Oral HEC 2022)

1) On voit déjà que $\forall P \in \mathbb{R}_3[x], \varphi(P) \in \mathbb{R}_3[x]$. De plus :

Si $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ et $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, alors

$$(P + Q)(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \varphi(P + Q)(x) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)x^2 + (a_0 + b_0)x^3 \\ &= a_1 + b_1 + a_2x + b_2x + a_3x^2 + b_3x^2 + a_0x^3 + b_0x^3 \\ &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_0x^3 + b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_0x^3 \\ &= \varphi(P)(x) + \varphi(Q)(x) \end{aligned}$$

$$\text{Et } (\lambda P)(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + (\lambda a_3)x^3$$

$$\text{Donc } \varphi(\lambda P)(x) = (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x + (\lambda a_3)x^2 + (\lambda a_0)x^3 = \lambda(a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_0x^3) = \lambda \cdot \varphi(P)(x)$$

Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.

Soit g l'application qui à un polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ associe le polynôme

$$g(P)(x) = a_3 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3$$

$$\text{Alors } \forall P \in \mathbb{R}_3[x], \varphi(g(P)) = \varphi(a_3 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P$$

$$\text{et } g(\varphi(P)) = g(a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_0x^3) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P$$

Donc $g \circ \varphi = \varphi \circ g = \text{id}$ donc $\varphi^{-1} = g$.

$$2. \text{ Si } P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \varphi(P) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_0x^3$$

$$\varphi(\varphi(P)) = a_2 + a_3x + a_0x^2 + a_1x^3 \quad \varphi(\varphi(\varphi(P))) = a_3 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3$$

$$\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(P)))) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = P \quad \text{donc } \varphi^4 = \text{id}.$$

$$3. \text{ a) } \varphi(P) = P \Leftrightarrow a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_0x^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_0 \\ a_2 = a_1 \\ a_3 = a_2 \\ a_0 = a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_0 \\ a_2 = a_0 \\ a_3 = a_0 \end{cases} \quad \text{donc } P = a_0 + a_0x + a_0x^2 + a_0x^3, a_0 \in \mathbb{R}. \quad S = \text{Vect}(1 + X + X^2 + X^3)$$

$$\text{b) De même } \varphi(P) = -P \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 \\ a_2 = -a_1 \\ a_3 = -a_2 \\ a_0 = -a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 \\ a_2 = a_0 \\ a_3 = -a_0 \end{cases} \quad \text{donc } P = a_0 - a_0x + a_0x^2 - a_0x^3, a_0 \in \mathbb{R}.$$

$$S = \text{Vect}(1 - X + X^2 - X^3)$$