Chapitre 9 : Applications linéaires – Exercices niveau 2

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel des suites réelles. Soit Δ l'application qui, à toute suite u de E , associe la suite $v = \Delta(u)$, où v est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\text{Ker}(\Delta)$. L'application Δ est-elle injective ?
3. a) Soit w une suite de E . Déterminer une suite u de E telle que $\Delta(u) = w$.
b) Δ est-elle surjective ?
4. a) Déterminer l'application Δ^2 .
b) Montrer que $\text{Ker}(\Delta^2) = \text{Vect}(a, b)$, où a est la suite constante égale à 1, et b la suite définie pour tout entier naturel n , par $b_n = n$.
5. Soit A l'ensemble des suites de E qui sont arithmétiques.
a) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E .
b) Déterminer $\Delta(A)$.

Exercice 2 (Oral HEC 2012)

Soit α un réel non nul et soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{\alpha x}$ et $f_2(x) = xe^{\alpha x}$. On note E le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré par f_1 et f_2 .

Soit Δ l'application qui, à toute fonction de E , associe sa fonction dérivée.

1. a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de E .
b) Montrer que Δ est un endomorphisme de E . Donner la matrice A de Δ dans la base (f_1, f_2) .
c) L'endomorphisme Δ est-il bijectif ?
2. Calculer A^{-1} . En déduire l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (2x - 3)e^{2x}$.
3. a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n .
b) En déduire la dérivée n -ième $f^{(n)}$ de la fonction f définie dans la question 3.

Exercice 3

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

- 1) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.
- 2) Montrer que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
- 3) Montrer que, si $f^2 = 0$, alors $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

Exercice 4 (Oral HEC 2022)

Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et à coefficients réels.

On définit sur $\mathcal{E}$ l'application φ par :

si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_0x^3$.

1. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathcal{E}$ et préciser φ^{-1} .
2. Déterminer φ^4 .
3. a) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathcal{E}$ tels que $\varphi(P) = P$.
b) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathcal{E}$ tels que $\varphi(P) = -P$.