Chapitre 9 : Applications linéaires – Feuille n°1

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère l'application f : $\begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM - MB \end{cases}$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

On considère l'application f, qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, associe le polynôme $f(P) = (X - 1)P' - P$.
Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par : $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ -x + z \\ 3x + 2y - z \end{pmatrix}$.

1) Déterminer une base du noyau de f. f est-elle injective ?

2) a) Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si $2a + b - c = 0$.

b) En déduire une base de Im f. f est-elle surjective ?

3) Déterminer une base de Im f par une autre méthode.

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de l'exercice 1.

1) A l'aide de coefficients indéterminés, déterminer Ker f. (on en donnera une base).

2) En déduire la dimension de Im f.

3) Déterminer une base de Im(f).

Exercice 5

On considère l'endomorphisme de l'exercice 2.

1) Déterminer une base de Ker f.

2) En déduire le rang de f. Donner une base de Im f.

Exercice 6

Soit f l'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 4y \\ 3y \end{pmatrix} \end{cases}$. On admet que f est une application linéaire.

1) Déterminer une base de Im f.

2) En déduire que f est injective.

Exercice 7

Soit f l'endomorphisme : $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \longmapsto (2x - 4y; x - 3y) \end{cases}$

1) a) Déterminer Ker(f).

b) f est-elle bijective ?

2) a) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) On note $u_1 = (4;1)$ et $u_2 = (1;1)$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

c) Déterminer $A' = M_{\mathcal{C}}(f)$.