Chapitre 9 : Applications linéaires – Feuille n°2

Exercice 1

Reprenons l'endomorphisme de l'exercice 2 feuille 1 : $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto (X-1)P' - P \end{array} \right.$.

1) Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.

2) On considère les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X-1)^2$.

a) Montrer que $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 7x - 3y \\ 12x - 5y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v)$ forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

2) Déterminer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application ϕ qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $\phi(M) = AM - MA$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer la matrice M de ϕ dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4

(Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, on note $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$)

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension 3.

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0_{\mathcal{E}}$ et $u^3 = 0_{\mathcal{E}}$.

Il existe donc un élément $x \in E$ tel que $u^2(x) \neq 0$.

1) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u^2(x), u(x), x)$ est une base de $\mathcal{E}$.

2) Déterminer la matrice A de u dans cette base.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit f et g les endomorphismes de E canoniquement associés aux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Soit $u = (-2,1)$. Calculer f(u) et g(u).

2) Montrer que $f - g - 2id_E = 0_E$.

3) Déterminer l'endomorphisme $f \circ g$.

Exercice 6

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique.

On considère la famille $\mathcal{C}$ constituée des polynômes $e_0 = 1$, $e_1 = X - 2$, $e_2 = (X+1)(X-2)$.

1) Donner la matrice A de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$.

2) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) a) Déterminer le polynôme $e_2 + e_1 + 4e_0$.

b) En déduire la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

4) Déterminer les coordonnées du polynôme $Q = 2X^2 - 3$ dans la base $\mathcal{C}$.