Chapitre 9 : Applications linéaires – Feuille n°3

Exercice 1

Reprenons l'endomorphisme f de l'exercice 7 de la feuille n°1 : $f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) \longmapsto (2x - 4y; x - 3y) \end{cases}$

On rappelle que B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, C la base (u_1, u_2) avec $u_1 = (4;1)$ et $u_2 = (1;1)$.

On rappelle que $A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad A' = M_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1) f est-elle un automorphisme ? Si oui, déterminer $M_C(f^{-1})$.

2) Montrer que $(X - 1)(X + 2)$ est un polynôme annulateur de A'. En déduire un polynôme annulateur de A.

3) Quelle relation relie les matrices A et A' ?

Exercice 2

Reprenons l'exercice 1 de la feuille 2. $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \longmapsto (X-1)P' - P \end{cases}$

On rappelle que $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, qu'avec $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X - 1)^2$, la famille $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base $\mathbb{R}_2[X]$, et enfin que :

$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D = M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) f est-elle un automorphisme ?

2) a) Montrer que $f^3 = f$.

b) En déduire un polynôme annulateur de A.

3) Quelle égalité relie les matrices A et D ?

Exercice 3

Partie A

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On considère les vecteurs $u_1 = (1;0;0)$, $u_2 = (1;-1;0)$, $u_3 = (1;1;2)$.

1) f est-il un automorphisme ?

2) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Montrer que $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$.

5) Quelle est la relation entre A et D ?

Partie B

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'expression de A^n en fonction de n.

2) On cherche à résoudre l'équation $AM = MA$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $AM = MA \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D$

b) Résoudre l'équation $DN = ND$, d'inconnue $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c) En déduire les solutions de l'équation $AM = MA$. (on déterminera une base de l'ensemble des solutions).

3) a) Déterminer un endomorphisme g tel que $g^2 = f$. Pour cela, on cherchera sa matrice D' dans la base $\mathcal{C}$, puis sa matrice A' dans la base $\mathcal{B}$. (on choisira une matrice D' avec des coefficients positifs).

b) Montrer que $g \circ (g - id_{\mathbb{R}^3}) \circ (g - 2\, id_{\mathbb{R}^3}) = 0$.