Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$ et la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A .

1) Montrer que la matrice P est inversible. Dans tout cet exercice, on ne calculera pas P^{-1} .

2) Montrer qu'il existe une matrice D diagonale telle que : $A = PDP^{-1}$. Déterminer D .

3) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$.

a) Montrer que $AM = M \Leftrightarrow DN = N$

b) Déterminer les matrices $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $DN = N$.

c) Soit $\mathcal{F} = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } AM = M \}$.

On note $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que $PE_{1,1}P^{-1}$ et $PE_{1,2}P^{-1}$ forment une base de $\mathcal{F}$.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$ et la matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A .

1) Montrer que la matrice P est inversible. Dans tout cet exercice, on ne calculera pas P^{-1} .

2) Montrer qu'il existe une matrice D diagonale telle que : $A = PDP^{-1}$. Déterminer D .

3) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$.

a) Montrer que $AM = M \Leftrightarrow DN = N$

b) Déterminer les matrices $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $DN = N$.

c) Soit $\mathcal{F} = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telles que } AM = M \}$.

On note $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que $PE_{1,1}P^{-1}$ et $PE_{1,2}P^{-1}$ forment une base de $\mathcal{F}$.