Chapitre 9 : Applications linéaires

1. Applications linéaires, noyau, image

1.1 Définitions

Définition :

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels. Soit f une application de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.
On dit que **f est une application linéaire** si :

$\forall (X, X') \in \mathcal{E}^2$, $\mathbf{f(X + X') = f(X) + f(X')}$

$\forall X \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f(\lambda.X) = \lambda.f(X)}$.

Remarque :
Les deux conditions peuvent être remplacées par :

$\forall X \in \mathcal{E}, \forall X' \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f(\lambda.X + X') = \lambda.f(X) + f(X')}$

Propriété

Soit f une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ vers un espace vectoriel $\mathcal{F}$.
Alors :
_ $\mathbf{f(0_{\mathcal{E}}) = 0_{\mathcal{F}}}$
_ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{E}^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,

$\mathbf{f(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 f(X_1) + \dots + \lambda_n f(X_n)}$.

(l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images)

Principe de la démonstration :
_ la deuxième condition de la définition avec $\lambda = 0$ donne : $\forall X \in E$, $f(0.X) = 0.f(X)$ donc $f(0) = 0$
_ la deuxième partie se démontre par récurrence

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels.
_ une application linéaire de **$\mathcal{E}$ dans lui-même** est appelée un **endomorphisme**.
_ une application linéaire **bijective** de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ est appelée un **isomorphisme**.
_ un **endomorphisme bijectif** de $\mathcal{E}$ est appelée un **automorphisme**.

Exemple :
Soit f : $\begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto X^2P' - P \end{cases}$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Attention, pour montrer que f est un **endomorphisme de $\mathcal{E}$**, il faut parfois montrer que $\forall$ **X $\in \mathcal{E}$, f(X) $\in \mathcal{E}$.**
(en plus de montrer la linéarité)

Autres exemples : La limite d'une suite convergente, l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, la dérivée d'une fonction dérivable, l'espérance d'une VAR finie… sont des applications linéaires.

1.2 $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$

Dans toute cette partie, on considère deux espaces vectoriels $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Définition :

L'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est noté $\boldsymbol{\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$.
L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{E}$ est noté $\boldsymbol{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$.

Notation :

Notons $\mathbf{0}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} : \begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$ $\quad \mathbf{0}_{\mathcal{E}} : \begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$ $\quad \mathbf{id}_{\mathcal{E}} : \begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \\ x \longmapsto x \end{cases}$

Propriété :

$\mathbf{0}_{E,F} \in \boldsymbol{\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$.
$\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $\forall g \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $\boldsymbol{f + g \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$. ("la somme de 2 applications linéaires est une application linéaire")
$\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$., $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\lambda f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$.
Autrement dit, **$\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est un espace vectoriel** (sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$)

Propriété :

_ **$\mathbf{id}_{\mathcal{E}} \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$** ($id_{\mathcal{E}}$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$)
_ soit $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ trois espaces vectoriels. $\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $\forall g \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ (**la composée de deux applications linéaires est une application linéaire**, et en particulier la composée de deux endomorphismes est un endomorphisme).
_ $\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, si f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$. (**si elle existe, la réciproque d'une application linéaire est une application linéaire**)

1.3 Noyau et image

Définition :

Soit f une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.
On appelle noyau de f, noté Ker f, l'ensemble des antécédents de $0_{\mathcal{F}}$ par f.

$$\mathbf{Ker\, f = \{x \in \mathcal{E} \mid f(x) = 0_{\mathcal{F}}\}}$$

On appelle image de f, noté Im f, l'ensemble des images par f des éléments de $\mathcal{E}$.

$$\mathbf{Im\, f = \{f(x),\ x \in \mathcal{E}\}} = \{y \in \mathcal{F} \mid \exists\, x \in \mathcal{E},\ y = f(x)\}.$$

Propriété :

Soit f une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.
Alors **Ker f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$**, et **Im f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$**.

Propriété :

Soit f est une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$ et soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathcal{E}$ alors :

$$\mathbf{Im\, f = Vect(f(e_1), ..., f(e_n))}$$

Remarque :

_ Pour trouver Ker f : on résout l'équation $f(X) = 0$
_ Pour trouver Im f :
  _ Im f = $\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.
  _ on cherche à quelle(s) condition(s) sur Y, l'équation $f(X) = Y$ admet **au moins** une solution.

Exemple :

Soit $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ -x/2 + y \end{pmatrix}$.

1) Déterminer une base de Ker f .

2) a) Déterminer une base de Im f.

b) Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. A quelle condition $Y \in \mathrm{Im}(f)$?

Rappel :

Soit A et B deux ensembles et f une application de A dans B.

On dit que f est **injective** si tout élément de B admet **au plus un antécédent** par f.

(pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution)

On dit que f est **surjective** si tout élément de B admet **au moins un antécédent** par f.

(pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution)

On dit que f est **bijective** si f est **injective et surjective** (tout élément de B admet un et un seul antécédent par f, pour tout $y \in B$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution).

Propriété :

Soit f une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Alors :
_ f est **injective** si et seulement si **Ker f = {$0_{\mathcal{E}}$}**
_ f est **surjective** si et seulement si **Im f = $\mathcal{F}$**.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, f est-elle injective ? surjective ?

2. Applications linéaires en dimension finie

Dans toute cette partie, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

2.1 Rang d'une application linéaire

Définition :

Soit f ∈ une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.
On appelle **rang de f** la **dimension de Im f**.

Remarque :
On sait que, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathcal{E}$, alors Im f = Vect$(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
Donc le rang de f est le rang de la famille $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

Théorème du rang :

Soit f ∈ une application linéaire de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{F}$.
Alors **dim(Ker f) + rang(f) = dim($\mathcal{E}$).**
(dim(Ker f) + dim(Im(f)) = dim($\mathcal{E}$).

Remarque :
Si on trouve Ker f et sa dimension, on peut en déduire la dimension de Im(f).
Il suffit de trouver une famille libre de Im(f) de cardinal dim(Im(f)) pour trouver une base de Im(f).
(un élément de Im(f) est de la forme f(x), où x ∈ E).

Exemple :
Dans l'exemple précédent, on a trouvé : Ker f = $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. En déduire la dimension et une base de Im(f).

Propriété : **Endomorphisme en dimension finie**

Soit $\mathcal{E}$ un espace de **dimension finie** n et f un **endomorphisme** de $\mathcal{E}$.
Les affirmations suivantes sont **équivalentes** :
(1) f est **bijective**
(2) f est **injective**
(3) **rang(f) = n**
(4) f est **surjective**

Démonstration :
(1) $\Rightarrow$ (2) si f est bijective, alors f est injective par définition
(2) $\Rightarrow$ (3) : si f injective Ker f = {0} donc dim(Ker f) = 0
D'après le théorème du rang rang(f) = n – dim(Ker(f)) = n
(3) $\Rightarrow$ (4) : si rang(f) = n dim(Im(f)) = n = dim($\mathcal{E}$)
Im(f) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ de même dimension que $\mathcal{E}$, donc Im f = $\mathcal{E}$ donc f est surjective.
(4) $\Rightarrow$ (1) si f est surjective dim(Im(f)) = n
D'après le théorème du rang dim(Ker(f)) = n – dim(Im(f)) = n – n = 0 donc Ker(f) = {0}.
Donc f est injective. Donc f est bijective.

Exemple :

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: $\begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x-y \end{pmatrix} \end{cases}$.

Déterminer Ker(f). f est-elle un automorphisme ?

Remarque :
Attention, si $\mathcal{E}$ n'est pas de dimension finie, un endomorphisme peut être injectif sans être surjectif ou inversement.
Ex : On peut montrer que f : $\begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto P' \end{cases}$ est surjective, mais n'est pas injective.

2.2 Matrice d'une application linéaire

Définition :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ un espace vectoriel de dimension p.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$, et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de $\mathcal{F}$.
Soit u une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.
On appelle **matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice de la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ dans la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$.

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathbf{u}) = \begin{array}{cc} \mathbf{u(e_1)} \ \dots \ \mathbf{u(e_n)} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{f_1} \\ \dots \\ \mathbf{f_p} \end{array} \end{array}$$

Exemple :

Soit u : $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -4x + 5y \\ 3y \end{pmatrix} \end{array} \right.$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2.1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{3.1}(\mathbb{R})$.
Déterminer la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Propriété : **Ecriture matricielle d'une application linéaire**

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces vectoriels. Soit $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ une base de $\mathcal{F}$.
Soit u une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.
Soit $x \in \mathcal{E}$. On pose $y = u(x)$.
Si on note $\mathbf{X = M_B(x)}$ $\mathbf{Y = M_C(y)}$ et $\mathbf{A = M_{B,C}(u)}$ alors $\mathbf{Y = AX}$

Exemple :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose x = (2; 3). Déterminer f(x).

Propriété :

Soit f une application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
S'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, f(X) = M.X, alors :

_ f est une application linéaire

_ la matrice de f dans les bases canoniques est M.

Ex : Soit $f \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + 3y \\ -x + y \\ 3y \end{pmatrix} \end{array} \right.$. Montrer que f est une application linéaire de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer sa matrice dans les bases canoniques.

Définition :

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. **L'application linéaire canoniquement associée à M** est l'application
f : $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, **f(X) = MX**.
(c'est l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est M)

2.2 Matrice d'un endomorphisme

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n.

Définition :

Soit f un endomorphisme de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathcal{E}$.
On appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}$** la matrice de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \ldots & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \ldots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

(attention, c'est la même base au départ et à l'arrivée !)

Exemples :

1) Soit $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -4x + 5y \end{pmatrix} \end{cases}$.

a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2.1}(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Soit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On voit facilement que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

2) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ P \longmapsto P + (X-1)P' \end{cases}$. Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Définition :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **L'endomorphisme canoniquement associée à M** est l'application $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{f(X) = MX}$.
(c'est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est M)

Exemple : Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Soit g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé.

Alors $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

2.3 Opérations sur les matrices carrées

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{E}$
Soit f et g deux endomorphismes de $\mathcal{E}$. Alors :
f = g si et seulement si $\mathbf{M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(g)}$.

Remarque :
Une fois que les bases sont choisies, il est donc équivalent de travailler sur l'endomorphisme ou sur sa matrice. Attention à bien choisir la base !

Définition :

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$.
On note : $\mathbf{f^0 = id_{\mathcal{E}}, f^1 = f, f^2 = f \circ f, \ldots,}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f^{n+1} = f \circ f^n}$

Propriété :

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension p. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{E}$.
Soit f et g deux endomorphismes de $\mathcal{E}$, λ un réel et n un entier naturel.
_ $\mathbf{M_{\mathcal{B}}(0_{\mathcal{E}}) = 0_p}$
_ $\mathbf{M_{\mathcal{B}}(id_{\mathcal{E}}) = I_p}$
_ $\mathbf{M_{\mathcal{B}}(f + g) = M_{\mathcal{B}}(f) + M_{\mathcal{B}}(g)}$
_ $\mathbf{M_{\mathcal{B}}(\lambda f) = \lambda \times M_{\mathcal{B}}(f)}$.
_ $\mathbf{M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}}(g) \times M_{\mathcal{B}}(f)}$.
_ $\mathbf{M_{\mathcal{B}}(f^n) = \left(M_{\mathcal{B}}(f)\right)^n}$
_ f est **bijective** si et seulement si $\mathbf{M_{\mathcal{B}}(f)}$ **est inversible**. Dans ce cas, $\mathbf{M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left(M_{\mathcal{B}}(f)\right)^{-1}}$

Remarque :
On peut généraliser les propriétés précédentes pour des applications linéaires (sauf pour l'identité et la puissance qui n'ont un sens que pour des endomorphismes)

Exemple : Soit f $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2y \end{pmatrix} \end{array}\right.$.
1) f est-elle un automorphisme ?
2) Montrer que $f^2 - 3f + 2id_E = 0_E$.

Propriété : rang d'une matrice / d'un endomorphisme

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$, et $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{E}$.
On note $\mathbf{M = M_{\mathcal{B}}(f)}$. Alors **le rang de f est égal au rang de M**.

Démonstration :
rang(M) = rang(vecteurs colonnes) = rang($f(e_1), \dots, f(e_n)$)
= dim(Vect($f(e_1), \dots f(e_n)$)) = dim(Im(f)) = rang(f).

3. Changement de base

3.1 Matrice de passage

Définition : **Matrice de passage**

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel de dimension n.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e'_n)$ deux bases de $\mathcal{E}$.
On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice, notée $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ définie par :

$$\mathbf{P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = M_{(e1, \dots, en)}(e_1', \dots., e_p') =} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{e'_1} & \dots & \mathbf{e'_n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{e_1} \\ \dots \\ \mathbf{e_n} \end{array}$$

Remarque :
D'après le chapitre précédent, on sait que, comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases de $\mathcal{E}$, $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible.

Exemple :
Dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, soit $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
On sait que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (deux vecteurs non colinéaires, dim($\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) = 2).
Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$'. Déterminer P.

Propriété :

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathcal{E}$. Alors $P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'}$ est inversible et $\mathbf{(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}}$

Propriété : **Changement de base pour un vecteur**

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathcal{E}$. Soit $x \in \mathcal{E}$.

Si on note $\begin{cases} X = M_{\mathcal{B}}(x) \\ X' = M_{\mathcal{B}'}(x) \\ P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \end{cases}$, alors $\mathbf{X = PX'}$ et $\mathbf{X' = P^{-1}X}$

Exemple : Suite de l'exemple précédent :
On admet que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$'.

3.2 Changement de base pour un endomorphisme

Propriété : **Formule de changement de base pour un endomorphisme**

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel $\mathcal{E}$ de dimension n.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathcal{E}$.

Si $\begin{cases} \mathbf{A = M_{\mathcal{B}}(f)} \\ \mathbf{A' = M_{\mathcal{B}'}(f)} \\ \mathbf{P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}} \end{cases}$ alors $\mathbf{A = PA'P^{-1}}$ et $\mathbf{A' = P^{-1}AP}$

Attention, propriété TRES IMPORTANTE !

Exemple :

Soit f : $\begin{cases} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -4x + 5y \end{pmatrix} \end{cases}$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a vu que $A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exprimer la matrice A en fonction de A'.

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que les matrices A et B sont **semblables** s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :
$\mathbf{A = P.B.P^{-1}}$.

Remarque :
Deux matrices sont semblables si ce sont les matrices d'un **même endomorphisme** dans deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3.3 Applications de la formule de changement de base

Remarques :
_ une égalité matricielle est équivalente à une égalité obtenue en **multipliant à gauche ou à droite** par une **matrice inversible**.
_ on a donc $\mathbf{A = PBP^{-1} \Leftrightarrow B = P^{-1}AP}$

Démonstration : $A = PBP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = P^{-1}PBP^{-1}P$ ($\times P^{-1}$ à gauche, $\times P$ à droite)
$\Leftrightarrow P^{-1}AP = B$)

Méthode :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Supposons qu'à l'aide de la formule de changement de base, on trouve : $\mathbf{A = PBP^{-1}}$, avec $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si le changement de base est intéressant (voir chapitre réduction), B est plus simple que A (diagonale ou triangulaire).

Les exemples seront la suite de l'exemple précédent :

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ $A = PA'P^{-1}$, avec $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On admet que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- **Calcul de l'inverse de A** :

Rappel :

Soit B et C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si les matrices B et C sont inversibles, alors la matrice BC est inversible et $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$.

Méthode :

On suppose que $A = PBP^{-1}$, avec P inversible. (et donc P^{-1} aussi).
Si B est inversible, alors A est inversible comme produit de matrices inversibles et
$A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}B^{-1}P^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$. (à redémontrer à chaque fois)

Exemple : (avec l'exemple précédent).

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Remarque :

A et B sont semblables, donc représentent le même endomorphisme u (dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$).

Donc A et B sont inversibles si et seulement si u est bijectif.

Donc A est inversible si et seulement si B est inversible.

Dans ce cas, on a : $A^{-1} = M_{\mathcal{B}}(u^{-1})$ et $B^{-1} = M_{\mathcal{B}'}(u^{-1})$.

Donc d'après la formule de changement de base, $A^{-1} = P.B^{-1}.P^{-1}$

- **Calcul de A^n** :

Propriété : A retenir, mais à redémontrer à chaque fois :

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, inversible.
Si $\mathbf{A = P.B.P^{-1}}$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A^n = P.B^n.P^{-1}}$

Démonstration :

_ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (PBP^{-1})^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1})$
$= PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B\dots B(P^{-1}P)BP^{-1}$
$= PB^nP^{-1}$

_ ou, plus proprement par récurrence

_ ou : A et B sont semblable donc représentent un même endomorphisme u dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On a alors : $M_{\mathcal{B}}(u^n) = A^n$ et $M_{\mathcal{B}'}(u^n) = B^n$
D'après la formule de changement de base, appliquée à u^n, on a donc : $A^n = PB^nP^{-1}$.

Ex : (suite de l'exemple précédent). Déterminer l'expression de A^n.

Remarque : **Changement de base et polynôme de matrice**
On suppose toujours que $A = P.B.P^{-1}$.
Soit $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$, de la forme $Q(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$
Alors $Q(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_2$
$= a_n P.B^n.P^{-1} + a_{n-1} P.B^{n-1}.P^{-1} + \dots + a_1 P.B.P^{-1} + a_0 P.I_2.P^{-1}$
$= P\left(a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \dots + a_1 B + a_0 I_2\right) P^{-1}$
$= P.Q(B).P^{-1}$

- **Equations matricielles :**

Méthode :

On cherche à résoudre une équation d'inconnue M.
_ on pose, par exemple **$N = P^{-1}MP$**, on obtient une **équation dans l'inconnue secondaire N**, qui est en général plus simple.
_ on **résout l'équation en N** (à l'aide de **coefficients indéterminés** très souvent)
_ on **résout l'équation en M** (à l'aide de **$M = PNP^{-1}$**).

Exemple : (suite de l'exemple précédent).
On cherche à résoudre l'équation AM = M, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
1) On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que $AM = M \Leftrightarrow A'N = N$.
2) Résoudre l'équation A'N = N, d'inconnue $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3) En déduire une base de l'ensemble des solutions de l'équation AM = M, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.