Fonctions contractantes (EDHEC 2023) – Correction

1) Soit $f \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}x \end{array} \right.$. Alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right| = \left|\frac{1}{2}(x - y)\right| = \frac{1}{2}|x - y|$

Donc $K = \frac{1}{2}$ convient.

La fonction nulle convient aussi.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|$

$\lim\limits_{x \to x0} |x - x_0| = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to x0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ donc $\lim\limits_{x \to x0} f(x) = f(x_0)$.

Donc f est continue en x_0. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Supposons que l'équation $f(x) = x$ admette deux solutions α et β.

Alors $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq K|\beta - \alpha|$ Comme $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$, on obtient : $|\beta - \alpha| \leq K|\beta - \alpha|$

$(1 - K)|\beta - \alpha| \leq 0$ En divisant par $1 - K > 0$: $|\beta - \alpha| \leq 0$

Comme on a aussi $|\beta - \alpha| \geq 0$, on obtient : $|\beta - \alpha| = 0$ donc $\beta = \alpha$.

L'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4) Pour $n = 0$: $|u_{0+1} - u_0| = |u_1 - u_0|$ $K^0|u_1 - u_0| = |u_1 - u_0|$ la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que pour un entier n, $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$

En appliquant (*) à u_n et u_{n+1}, on obtient : $|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K|u_{n+1} - u_n|$ donc $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K|u_{n+1} - u_n|$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $K|u_{n+1} - u_n| \leq K^{n+1}|u_1 - u_0|$ (car $K > 0$)

Donc $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K^{n+1}|u_1 - u_0|$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$.

b) $-1 < K < 1$ donc la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} K^n |u_1 - u_0|$ converge. Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$ converge. Donc la série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ converge absolument, donc converge.

Pour $N \in \mathbb{N}$, posons $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$ par télescopage.

Donc $\forall N \geq 1$, $u_N = S_{N-1} + u_0$. Comme (S_N) converge, la suite (u_n) converge également.

Soit a sa limite. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, et comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe $a = f(a)$. Donc a est solution de l'équation $f(x) = x$.

Conclusion : L'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.

5) a) $n \leq n + p - 1$ et $\forall i \in \{n, \ldots, n + p - 1\}$, $|u_{i+1} - u_i| \leq K^i|u_1 - u_0|$

Donc, en sommant les inégalités, $\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum\limits_{i=n}^{n+p-1} K^i|u_1 - u_0|$

b) $\sum\limits_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i) = u_{n+p} - u_n$ par télescopage, donc, par inégalité triangulaire,

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| = \left|\sum_{i=n}^{n+p-1}(u_{i+1}-u_i)\right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1}\left|u_{i+1}-u_i\right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1}K^i\left|u_1-u_0\right| = \left|u_1-u_0\right|\sum_{i=n}^{n+p-1}K^i = \left|u_1-u_0\right|\sum_{j=0}^{p-1}K^{n+j}$$

$(j = i - n \Leftrightarrow i = j + n)$

$$\left|u_{n+p}-u_n\right| \leq K^n\left|u_1-u_0\right|\sum_{j=0}^{p-1}K^j$$

Donc $\left|u_{n+p}-u_n\right| \leq K^n\left|u_1-u_0\right|\dfrac{1-K^p}{1-K}$ car $K \neq 1$

c) $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n+p} = a$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left|u_{n+p}-u_n\right| = \left|a-u_n\right|$

$-1 < K < 1$, donc $\lim\limits_{p\to+\infty} K^n\left|u_1-u_0\right|\dfrac{1-K^p}{1-K} = K^n\left|u_1-u_0\right| \times \dfrac{1}{1-K}$.

Par passage aux limites dans l'inégalité de la question 5 b), $\left|a-u_n\right| \leq \dfrac{K^n}{1-K}\left|u_1-u_0\right|$

6) a) $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $e^t + 1 \geq 1$ donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction de classe C^2 qui ne s'annule pas. $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$

$$f''(t) = -\frac{e^t(1+e^t)^2 - e^t2(1+e^t)e^t}{(1+e^t)^4} = -\frac{e^t(1+e^t)(1+e^t-2e^t)}{(1+e^t)^4} = -\frac{e^t(1-e^t)}{(1+e^t)^3} = \frac{e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3} \qquad (u^2 \longrightarrow 2uu')$$

b) $f''(t)$ est du signe de $e^t - 1$ et $e^t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^t \geq 1 \Leftrightarrow t \geq 0$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$		$\searrow$	$-¼$	$\nearrow$	

$f'(0) = -\dfrac{1}{4}$

Donc $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $-\dfrac{1}{4} \leq f'(t)$

De plus, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $-e^t \leq 0$ et $(1+e^t)^2 \geq 0$ donc $f'(t) \leq 0$

Donc $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $-\dfrac{1}{4} \leq f'(t) \leq 0 \leq \dfrac{1}{4}$ donc $\left|f'(t)\right| \leq \dfrac{1}{4}$.

c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}, \left|f'(t)\right| \leq \dfrac{1}{4}$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $\left|f(x)-f(y)\right| \leq \dfrac{1}{4}\left|x-y\right|$. Donc f est 1/4 – contractante.

d. La fonction f est 1/4 - contractante, donc d'après la question 4)b. la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente.

f. $u_0 = 0$ $\quad u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{2}$, donc d'après la question 5)c.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|a-u_n\right| \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\left|\frac{1}{2}-0\right| \qquad \left|u_n-a\right| \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{2} \qquad \left|u_n-a\right| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Si $4^n > \dfrac{2000}{3}$ $\quad \dfrac{1}{4^n} < \dfrac{3}{2000}$ $\quad \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \leq \dfrac{1}{1000}$ donc $\left|u_n-a\right| \leq 10^{-3}$. Donc u_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près.