

Chapitres 3 et 4 - Suites et séries
Les fonctions K-contractantes (EDHEC 2023)

1) Donner un exemple d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0;1[$ tel que, pour tout couple $(x; y)$ de réels, on ait : $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ (*)

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition précédente.

On dit que f est K -contractante.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) À l'aide de la relation (*), montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n .

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$

b. Établir la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note a sa limite.

c. Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

5) On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p > 1$).

a. Justifier que l'on a : $\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|$

b. En déduire l'inégalité : $|u_{n+p} - u_n| \leq K^n \times \frac{1 - K^p}{1 - K} |u_1 - u_0|$.

c. Établir enfin l'inégalité suivante : $|a - u_n| \leq \frac{K^n}{1 - K} |u_1 - u_0|$

6) Étude d'un exemple : on considère la fonction f définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{1 + e^t}$

a. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout réel t .

b. Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité : $\forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leq \frac{1}{4}$.

c. En déduire que f est $1/4$ -contractante.

d. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ valable pour tout entier naturel n .

Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.

e. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n , la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :

```
def suite(n):
```

```
    u = ....
```

```
    for k in range(1, n + 1):
```

```
        u = ....
```

```
    return u
```

f. En s'appuyant sur le résultat de la question 5) c, établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n > 2000/3$.

g. En déduire un programme Python, utilisant la fonction précédente, qui calcule la valeur approchée de a qui en résulte.