Devoir à la maison n°1 - Correction

Exercice 1

$\forall\, n \geq 1, \left(1 - \dfrac{\ln(2)}{n}\right)^n = \exp\left(n.\ln\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{n}\right)\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} - \dfrac{\ln(2)}{n} = 0$ donc $\ln\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{n}\right) \sim_{+\infty} - \dfrac{\ln(2)}{n}$ donc $n.\ln\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{n}\right) \sim_{+\infty} - \ln(2)$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n.\ln\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{n}\right) = - \ln(2)$.

Comme la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(n.\ln\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{n}\right)\right) = \exp(-\ln(2)) = \dfrac{1}{e^{\ln(2)}} = \dfrac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{\ln(2)}{n}\right)^n} = 2$.

Exercice 2

$0 \leq \dfrac{1 - e^{-1}}{\sqrt{x}} - f(x) \leq \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \Leftrightarrow - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \leq f(x) - \dfrac{1 - e^{-1}}{\sqrt{x}} \leq 0$ $\quad \dfrac{1 - e^{-1}}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{1 - e^{-1}}{\sqrt{x}}$

$1 - e^{-1} - \dfrac{1}{2x} \leq \sqrt{x}f(x) \leq 1 - e^{-1}$ (car $\sqrt{x} > 0$) $\quad 1 - \dfrac{1}{2x(1 - e^{-1})} \leq \dfrac{\sqrt{x}f(x)}{1 - e^{-1}} \leq 1$ (car $1 - e^{-1} > 0$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{2x(1 - e^{-1})} = 1$, donc par encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}f(x)}{1 - e^{-1}} = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1 - e^{-1}}{\sqrt{x}}} = 1$ donc $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{1 - e^{-1}}{\sqrt{x}}$

Exercice 3 – EML 2022

1. $\forall\, t < 1$ $\;-t > -1$ $\;1 - t > 0$ donc $\ln(1 - t)$ est bien défini.

f est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ comme quotient de fonctions continues (dont le dénominateur ne s'annule pas)

En 0 : $\lim\limits_{t \to 0} -t = 0$ donc $\ln(1 - t) \sim_0 - t$ $\quad -\dfrac{\ln(1 - t)}{t} \sim_0 1$ donc $\lim\limits_{t \to 0,\, t \neq 0} f(t) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur $]-\infty;1[$.

2. a) Pour $t < 1$, posons $g(t) = \dfrac{t}{1 - t} + \ln(1 - t)$

g est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $\forall\, t < 1$, $g'(t) = \dfrac{1(1 - t) - t(-1)}{(1 - t)^2} + \dfrac{-1}{1 - t} = \dfrac{1}{(1 - t)^2} - \dfrac{1 - t}{(1 - t)^2} = \dfrac{t}{(1 - t)^2}$ donc $g'(t)$ est du signe de t.

t	$-\infty$	0	1
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$g(0) = 0 + \ln(1) = 0$

D'après le tableau de variations, $g(t) \geq 0\ \forall\, t < 1$

$\forall\, t < 1$, $\dfrac{t}{1 - t} + \ln(1 - t) \geq 0$

b) f est de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$ comme quotient et composée de fonctions de classe C^1 et

$\forall\, t \in\,]-\infty;0[\, \cup\,]0;1[$, $f'(t) = - \dfrac{\dfrac{-1}{1 - t}t - \ln(1 - t)}{t^2} = \dfrac{\dfrac{t}{1 - t} + \ln(1 - t)}{t^2} = \dfrac{g(t)}{t^2}$

c) $\forall\, t \in\,]-\infty;0[$, $f'(t) \geq 0$ donc f est croissance sur $]-\infty;0[$

$\forall\, t \in\,]0;1[$, $f'(t) \geq 0$ donc f est croissante sur $]0;1[$.

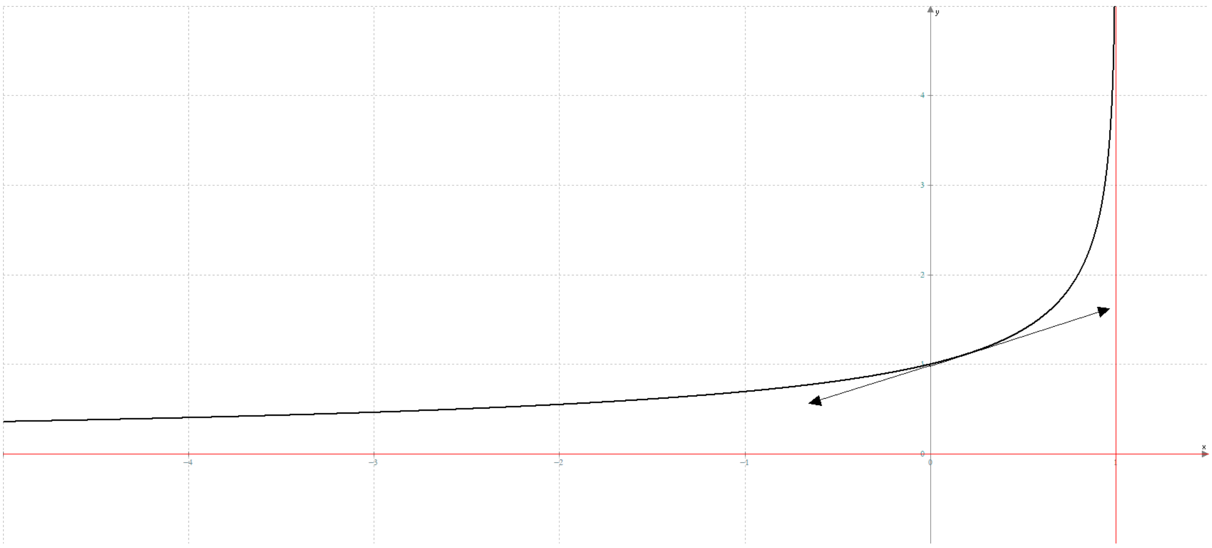
De plus, f est continue en 0. Donc f est croissante sur]- ∞;1[.

3. $\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{-\frac{\ln(1-t)}{t} - 1}{t} \sim_0 \frac{\frac{t}{2}}{t} \sim \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{1}{2}$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

4. $\lim\limits_{t \to -\infty} 1 - t = -\infty$ $\frac{\ln(1-t)}{t} = \frac{\ln(1-t)}{1-(1-t)}$ $\frac{\ln(X)}{1-X} \sim_{+\infty} -\frac{\ln(X)}{X}$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{1-X} = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 0$

$\lim\limits_{t \to 1} 1 - t = 0$ donc $\lim\limits_{t \to 1} \ln(1-t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t \to 1} t = 1 > 0$ donc $\lim\limits_{t \to 1} f(t) = +\infty$.

5. C_f admet : _ une asymptote horizontale (l'axe des abscisses)
_ une asymptote verticale (d'équation x = 1)



Rappels :

Un **intervalle** est une partie de ℝ « sans trou ».

De manière plus précise :

Soit I une partie de ℝ.

I est un intervalle si $\forall x \in I, \forall y \in I$ avec $x < y$, $[x; y] \subset I$ ($\forall z \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq z \leq y$, $z \in I$)

Les intervalles de ℝ sont :

ℝ, ∅, et les ensembles de type : [a ; b],]a ;b], [a ; b[,]a ;b[, [a ; + ∞[,]a ;+ ∞[,]- ∞ ;b],]- ∞ ;b[

Attention : L'intersection de deux intervalles est un intervalle, mais pas la réunion !

Ex : ℝ* =]- ∞ ;0[∪]0 ; + ∞[n'est pas un intervalle.

Attention :

Par définition, une fonction f est croissante **sur un intervalle**, continue **sur un intervalle**, dérivable **sur un intervalle**, de classe C^1 **sur un intervalle**, convexe **sur un intervalle**…

A ne pas écrire : f est continue sur]- ∞;0[∪]0;1[