ECG2 : Devoir à la maison n°2 – niveau 1

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n.x$

l) a) Déterminer pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

2) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).
d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \sim_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{2n}$

Exercice 2

On admet que, si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a :
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.
On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.
1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a, $0 \leq u_n < 1$.
(b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$.
(a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{2}$
(b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour montrer que : $u_n - 1 \sim_{+\infty} -\dfrac{2}{n}$.