

Devoir à la maison n°2 - Niveau 2 – Correction
Sujet ESSEC II 2015

$$1) \left\{ \frac{(-1)^i}{i+1}, i \in [[0, 4]] \right\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right\} \quad \text{donc } \min_{i \in [[0, 4]]} \frac{(-1)^i}{i+1} = -\frac{1}{2}.$$

$$2) a) \text{ Si } I \subset J : \forall i \in I, i \in J \text{ donc } x_i \geq \min_{j \in J} x_j \quad \text{donc } \min_{i \in I} (x_i) \geq \min_{j \in J} x_j$$

$$\text{Donc } \min_{i \in J} (x_i) \leq \min_{i \in I} (x_i)$$

$$b) \forall k \in \mathbb{N}, u_n(k) = \min_{i \in [[n, n+k]]} x_i \text{ et } u_n(k+1) = \min_{i \in [[n, n+k+1]]} x_i.$$

$$\text{Comme } [[n, n+k]] \subset [[n, n+k+1]], \text{ on a : } \min_{i \in [[n, n+k+1]]} x_i \leq \min_{i \in [[n, n+k]]} x_i$$

Donc $u_n(k+1) \leq u_n(k)$. Donc la suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante.

c) (x_n) est une suite de réels positifs donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, u_n(k) \geq 0$.

La suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel u_n .

$$d) u_{n+1}(k) = \min_{i \in [[n+1, n+k+1]]} x_i \text{ et } u_n(k+1) = \min_{i \in [[n, n+k+1]]} x_i.$$

$$\text{Comme } [[n+1, n+k]] \subset [[n, n+k+1]], \text{ on a : } \min_{i \in [[n, n+k+1]]} x_i \leq \min_{i \in [[n+1, n+k+1]]} x_i$$

$$\text{Donc } u_n(k+1) \leq u_{n+1}(k).$$

$$\text{Or } \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k+1) = u_n \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{n+1}(k) = u_{n+1}, \text{ donc par passage à la limite, } u_n \leq u_{n+1}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

e) La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Donc d'après la propriété de la limite monotone, elle converge vers un réel ou tend vers $+\infty$.

$$3) a) y_n \text{ vaut : } 2, 0, 2, 0, 2, 0, \dots \quad z_n \text{ vaut : } 2, 1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, \dots$$

Pour y_n : $\forall k \geq 1, u_n = \min(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0$ car il y a au moins 2 termes.

$$\text{Pour } z_n : \forall k \geq 1, u_0(k) = 1 \quad u_1(k) = 1 \quad \forall n \geq 2, u_n(k) = 2$$

$$b) \text{ Pour } y_n : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad \text{donc } \liminf_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

$$\text{Pour } z_n : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2 \quad \text{donc } \liminf_{n \rightarrow +\infty} z_n = 2.$$

$$4) a) \text{ Si } (x_n) \text{ est une suite croissante : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, u_n(k) = \min_{i \in [[n, n+k]]} x_i = x_n$$

$$\text{Donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) = x_n \quad \text{donc } u_n = x_n. \text{ Donc } \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$$

$$b) \text{ Si } (x_n) \text{ est une suite décroissante : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, u_n(k) = \min_{i \in [[n, n+k]]} x_i = x_{n+k}$$

$$\text{Donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n+k} = \ell \quad \text{donc } u_n = \ell. \text{ Donc } \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell = \ell$$

$$c) i) \text{ Il existe un entier } i_0 \in [[1, r]] \text{ tel que } \min_{i \in [[1, r]]} \alpha_i = \alpha_{i_0}.$$

$$\text{Comme } \alpha_{i_0} \in I, \text{ on a donc : } \min_{i \in [[1, r]]} \alpha_i \in I.$$

ii) Soit $\varepsilon > 0$:

Comme (x_n) converge vers L , alors par définition, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$L - \varepsilon \leq x_n \leq L + \varepsilon.$$

Pour tout $n \geq n_0$, pour tout $k \in \mathbb{N}, \forall i \in [[n, n+k]], i \geq n_0$ donc x_i appartient à l'intervalle $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$.

D'après la question la question précédente, on a donc : $\min_{i \in [[n, n+k]]} x_i \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon]$.

$$\text{Donc } u_n(k) \in [L - \varepsilon, L + \varepsilon].$$

$$\forall k \geq 0, L - \varepsilon \leq u_n(k) \leq L + \varepsilon \text{ donc par passage à la limite } L - \varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) \leq L + \varepsilon. \quad L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$$

Pour résumer, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$.

$$\text{Donc } (u_n) \text{ converge vers } L. \text{ Donc } \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = L.$$