Devoir à la maison n°2 – Niveau 2
Limite inférieure d'une suite

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$, on notera $[[a, b]] = \{ k \in \mathbb{Z}, a \leq k \leq b \}$ l'intervalle d'entiers d'extrémités a et b.
Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturels, on notera $\min\limits_{i\in I}(x_i)$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$.Par exemple $\min\limits_{i\in[[1,9]]} \frac{1}{i} = \frac{1}{9}$.
On admet qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel L si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[L - \varepsilon;L + \varepsilon]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

1) Un exemple : déterminer $\min\limits_{i\in[[0,4]]} \frac{(-1)^i}{i + 1}$.
2) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$, $u_n(k) = \min\limits_{i\in[[n, n+k]]} x_i$.
a) Soit I et J deux parties finies de $\mathbb{N}$. Si $I \subset J$, comparer les réels $\min\limits_{i\in I}(x_i)$ et $\min\limits_{i\in J}(x_i)$
b) Montrer que la suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante.
c) En déduire que la suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est convergente. On note $u_n = \lim\limits_{k \to +\infty} u_n(k)$.
d) Etablir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k + 1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
e) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$). Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n \geq 0}$ et est notée $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n$.
3) Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = 1 + (-1)^n \qquad \text{et} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}, z_n = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

a) Expliciter pour n positif ou nul et k supérieur ou égal à 1 les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$.
b) Déterminer $\liminf\limits_{n \to +\infty} y_n$ et $\liminf\limits_{n \to +\infty} z_n$.
4) a) On suppose ici que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge en croissant vers un réel L alors $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n = L$.
b) Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel L, alors $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n = L$.
c) i) Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ des réels donnés et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On suppose que pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$, α_i appartient à I. Montrer que $\min\limits_{i\in[[1,r]]} \alpha_i \in I$.
ii) Démontrer que si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de réels positifs convergente vers L réel positif, on a $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n = L$.

Remarque : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Pour x réel positif fixé, on peut définir la fonction φ_x sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall\ h \geq 0$, $\varphi_x(h) = \min\limits_{u\in[x, x + h]} f(u)$.
On peut alors montrer que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}^+$ quand h tend vers $+ \infty$.
Si on note Φ_x cette limite, on peut montrer que la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi_x$ existe.
On la nomme **la limite inférieure de f** et elle est notée $\liminf\limits_{x \to +\infty} f(x)$.