Correction D.M. n°3

Exercice 1 – EDHEC 2018

1. a) (A_0, A_1, A_2) forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, $P(X = 1) = P(P_1) = P(A_0)P_{A0}(P_1) + P(A_1)P_{A1}(P_1) + P(A_2)P_{A2}(P_1) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{2}$

b) De même, $\forall n \geq 2$, $(X = n) = F_1 \cap \ldots \cap F_{n-1} \cap P_n$ et

$P(X = n) = P(A_0)P_{A0}(X = n) + P(A_1)P_{A1}(X = n) + P(A_2)P_{A2}(X = n) = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times 0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(par indépendance des lancers une fois la pièce choisie)

c) $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$

$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1 - \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} - \sum\limits_{n'=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n'+2}$ $(n' = n - 2)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\sum\limits_{n'=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\times\frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\times 2 = \frac{1}{3}$.

2. $\sum\limits_{n\geq 0} n.P(X = n) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + \sum\limits_{n\geq 2} n.P(X = n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum\limits_{n\geq 2} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc la série converge absolument. Donc X admet une espérance et

$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\times 3 = 1$

3. $\sum\limits_{n\geq 0} n(n-1)P(X = n) = 0 \times P(X = 0) + 0 \times P(X = 1) + \sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)P(X = n) = \frac{1}{12}\sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

La série converge absolument, donc d'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ admet une espérance et

$E((X(X-1)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X = n) = \frac{1}{12}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

$X^2 = X(X-1) + X$ donc X^2 admet une espérance et $E(X^2) = E((X(X-1)) + E(X) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$.

Donc X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$.

4. La pièce n°0 a la même probabilité de faire pile ou face. Les deux autres pièces ont des propriétés symétriques. Donc "pile" et "face" ont des rôles symétriques dans l'expérience aléatoire. Donc Y suit la même loi que X.

Exercice 2

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = k.P(X \geq n)$ $\quad P(X \geq n) - P(X \geq n + 1) = k.P(X \geq n)$

$u_n - u_{n+1} = k.u_n$

Donc $u_{n+1} = u_n - ku_n = u_n(1 - k)$.

(u_n) est une suite géométrique de raison $(1 - k)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1 - k)^{n-1}u_1$ $\quad$ avec $u_1 = P(X \geq 1) = 1$ car X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

$u_n = (1 - k)^{n-1}$

2) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = k.P(X \geq n) = (1 - k)^{n-1}k$.

Ou : $P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n + 1) = (1 - k)^{n-1} - (1 - k)^n = (1 - k)^{n-1}(1 - (1 - k)) = (1 - k)^{n-1}k$.

Donc X suit une loi géométrique de raison k.