Devoir à la maison n°4 – Niveau 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.
Si $(A_k)_{k\geq 1}$ est une suite de matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si l'on note $a_{i,j}(k)$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice A_k, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de A, alors on écrira $A = \lim\limits_{k\to+\infty} A_k$ si pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{i,j}(k) = a_{i,j}$.
On dit alors que la suite $(A_k)_{k\geq 1}$ converge vers A.
Si G est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et t un réel positif, on note, si la convergence est établie,

$$M(t) = \lim_{k\to+\infty}\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k$$

1. Soit G la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $G = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, α et β étant des réels strictement positifs.

a) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$.

b) En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel, $\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = I_3 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1}\right)G$.

c) Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel,

$$\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1} = \frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}$$

d) Montrer que $M(t) = I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}G$.

2. On suppose que dans cette question que $G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ 4\alpha & 0 & -4\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$. On note aussi $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) On admet que $A^3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 2A^2 + A$ (on explicitera A^2).
Que peut-on dire du polynôme $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$?

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'il existe un polynôme Q et des réels a, b, c tels que, pour tout x réel :

$$\left(1 + \frac{\theta}{k}x\right)^k = Q(x)U(x) + ax^2 + bx + c \quad (*).$$

b) Déterminer une factorisation de U(x) et en déduire que c = 1 et $\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k = a + b + c$.

c) En dérivant la relation (*), montrer que : $\theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a + b$.

En déduire que $a = \theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k + 1$, $b = 2\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1+\frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2$.

d) En conclure que pour tout $t \geq 0$,

$$M(t) = \left(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}\right)A^2 + ((2+\alpha t)e^{-\alpha t} - 2)A + I_3.$$