D.M. n °4 niveau 2 – Correction
Extraits ESSEC 2 2023

1. a) Par récurrence sur i :

_ pour i = 1 : $G^1 = G$ et $(-\alpha-\beta)^{1-1}G = 1.G = G$ donc la propriété est vraie pour i =1

_ supposons qu'à un rang i, $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$.

Alors $G^{i+1} = G^i.G = (-\alpha-\beta)^{i-1}G.G = (-\alpha-\beta)^{i-1}G^2$

Or $\begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-\alpha-\beta)^2 & -\alpha^2-\alpha\beta & -\alpha\beta-\beta^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-\alpha-\beta)\begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-\alpha-\beta)G$$

Donc $G^{i+1} = (-\alpha-\beta)^{i-1}(-\alpha-\beta)G = (-\alpha-\beta)^iG$ Donc $\forall\, i \geq i$, $(-\alpha-\beta)^{i-1}G$.

b) Les matrices I_3 et $\frac{t}{k}G$ commutent, donc d'après le binôme de Newton,

$$\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}I_3^{k-i}\left(\frac{t}{k}G\right)^i = \binom{k}{0}I_3^k\left(\frac{t}{k}G\right)^0 + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}I_3^{k-i}\left(\frac{t}{k}\right)^iG^i$$

$$= I_3 + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}I_3\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1}G = I_3 + \left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1}\right)G$$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i(-\alpha-\beta)^{i-1} = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{t}{k}\right)^i\frac{(-\alpha-\beta)^i}{-\alpha-\beta}$ ($\alpha + \beta \neq 0$ car les deux sont strictement positifs)

$$= -\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(-\frac{t(\alpha+\beta)}{k}\right)^i1^{k-i} - \binom{k}{0}.1\right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\left(-\frac{t(\alpha+\beta)}{k}+1\right)^k - 1\right) \text{ (d'après le binôme de Newton)} = \frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}$$

d) Donc $\forall\, k \geq 1$, $\displaystyle\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = I_3 + \frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta}G$

$$\left(1-\frac{(\alpha+\beta)t}{k}\right)^k = \exp\left(k.\ln\left(1-\frac{(\alpha+\beta)t}{k}\right)\right)$$

$\displaystyle\lim_{k\to+\infty} -\frac{(\alpha+\beta)t}{k} = 0$ donc $\displaystyle\ln\left(1-\frac{(\alpha+\beta)t}{k}\right) \sim_{+\infty} -\frac{(\alpha+\beta)t}{k}$ donc $\displaystyle k.\ln\left(1-\frac{(\alpha+\beta)t}{k}\right) \sim_{+\infty} -(\alpha+\beta)t$

Donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} k.\ln\left(1-\frac{(\alpha+\beta)t}{k}\right) = -(\alpha+\beta)t$. Par continuité de la fonction exp,

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{(\alpha+\beta)t}{k}\right)^k = e^{-(\alpha+\beta)t} \text{ donc } \lim_{k\to+\infty}\frac{1-\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k}{\alpha+\beta} = \frac{1-e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}$$

D'après la définition de la convergence de matrice, on peut démontrer facilement la propriété suivante :

Soit $(A_k)_{k\geq1}$ et $(B_k)_{k\geq1}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\lambda_k)_{k\geq1}$ une suite de réels et λ un réel :

_ Si $(A_k)_{k\geq1}$ converge vers A et si $(B_k)_{k\geq1}$ converge vers B, alors $(A_k + B_k)_{k\geq1}$ converge vers A + B

_ Si $(\lambda_k)_{k\geq1}$ converge vers λ, alors $(\lambda_kC)_{k\geq1}$ converge vers $\lambda.C$

Donc $M(t) = \lim_{k \to +\infty}\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = I_3 + \frac{1 - e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha + \beta}G$.

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

Donc $A^3 - 2A^2 + A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & -7 \\ -28 & 8 & 20 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ -12 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$.

Donc le polynôme $U(x) = x^3 - 2x^2 + x$ est un polynôme annulateur de A.

b) $U(x) = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$ donc (*) devient : $\left(1 + \frac{\theta}{k}x\right)^k = Q(x)x(x - 1)^2 + ax^2 + bx + c$

En évaluant cette égalité en x = 0, on obtient : $1^k = Q(0).0 + a.0^2 + b.0 + c$ donc $c = 1$

En évaluant cette égalité en x = 1 : $\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k = Q(1).0 + a.1^2 + b.1 + c$ donc $a + b + c = \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k$

c) En dérivant (*), on a : $k.\frac{\theta}{k}\left(1 + \frac{\theta}{k}x\right)^{k-1} = Q(x)U'(x) + Q'(x)U(x) + 2ax + b$ avec $U'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

En évaluant en x = 1 :

$\theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = Q(1)U'(1) + Q'(1)U(1) + 2a + b$ avec $U(1) = 0$ et $U'(1) = 0$ Donc $2a + b = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1}$.

D'où le système : $\begin{cases} a + b = \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - 1 \\ 2a + b = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} \end{cases}$ $\begin{cases} a + b = \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - 1 \\ a = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

En remplaçant dans L_1 : $b = 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2$

d) En évaluant l'égalité polynomiale (*) à la matrice A, on obtient :

$\left(I_3 + \frac{\theta}{k}A\right)^k = Q(A)U(A) + aA^2 + bA + cI_3$ $\left(I_3 + \frac{\theta}{k}A\right)^k = aA^2 + bA + cI_3$ car $U(A) = 0$

Or $G = -\alpha A$ donc $\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = \left(I_3 - \frac{t\alpha}{k}A\right)^k$

Avec $\theta = -t.\alpha$, on a :

$\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = \left(-t.\alpha.\left(1 - \frac{t.\alpha}{k}\right)^{k-1} - \left(1 - \frac{t.\alpha}{k}\right)^k + 1\right)A^2 + \left(2\left(1 - \frac{t.\alpha}{k}\right)^k + t.\alpha.\left(1 - \frac{t.\alpha}{k}\right)^{k-1} - 2\right)A + I_3$

Or de la même manière qu'en question 1 : $\lim_{k \to +\infty}\left(1 - \frac{t.\alpha}{k}\right)^k = \lim_{k \to +\infty}\exp\left(k.\ln\left(1 - \frac{t.\alpha}{k}\right)\right) = \exp(-t.\alpha)$

$\lim_{k \to +\infty}\left(1 - \frac{t.\alpha}{k}\right)^{k-1} = \lim_{k \to +\infty}\frac{\left(1 - \frac{t.\alpha}{k}\right)^k}{\left(1 - \frac{t.\alpha}{k}\right)} = \frac{\exp(-t.\alpha)}{1} = \exp(-t.\alpha)$

Donc $M(t) = \lim_{k \to +\infty}\left(I_3 + \frac{t}{k}G\right)^k = (-t.\alpha.e^{-t.\alpha} - e^{-t.\alpha} + 1)A^2 + (2e^{-t.\alpha} + t.\alpha.e^{-t.\alpha} - 2)A + I_3$

$= \left(1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}\right)A^2 + ((2 + \alpha t)e^{-\alpha t} - 2)A + I_3$.