D.M. n°5 – Correction (EDHEC 2020)

1) Si $n = 1$: l'urne U contient une boule, donc X est la loi certaine égale à 1.
On tire donc une boule dans l'urne V.
Donc $Y(\Omega) = \{0,1\}$ $P(Y = 1) = P(\text{"tirer une boule blanche"}) = p$. Donc $Y \longrightarrow \mathcal{B}(p)$.
2) Il y a n boules numérotées de 1 et n. Par équiprobabilité $X \longrightarrow \mathcal{U}([[1;n]])$.
Donc $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
3) Si $(X = k)$: on tire k boules avec remise dans l'urne V.
Les tirages sont indépendants. La probabilité de tirer une boule blanche est p.
Y est le nombre de boules blanches tirées. Donc $Y_{(X = k)} \longrightarrow \mathcal{B}(k, p)$.

Donc $P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \text{ si } 0 \leq i \leq k \\ 0 \text{ si } i > k \text{ (événement impossible)} \end{cases}$

4)
```
import numpy.random as rd
n=int(input ('entrez la valeur de n :'))
p=float(input ('entrez la valeur de p : '))
X = rd.randint(1,n+1)
Y = rd.binomial(X,p)
```
5) a) Y prend des valeurs entières. Au minimum, on peut ne tirer aucune blanche (car $p < 1$).
Au maximum, on a tiré la boule numéro n $(X = n)$, puis on a tiré n boules blanches dans l'urne V. Donc $Y(\Omega) = [[0;n]]$.
La famille $(X = k)_{k \in [[1;n]]}$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = 0)$ *(Loi marginale)*$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \binom{k}{0} p^0 (1-p)^k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q^k$

$q \neq 1$ donc $P(Y = 0) = \dfrac{1}{n}\ q^1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$ *(somme géométrique -> 1^{er} terme $\times \dfrac{1-q^{\text{nb de temes}}}{1-q}$)*

$P(Y = 0) = \dfrac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$

b) De la même manière, $\forall\, i \in [[0;n]]$, $P(Y = i) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = i)$

Or $P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \text{ si } k \geq i \\ 0 \text{ si } k < i \end{cases}$, donc :

$P(Y = i) = \sum_{k=1}^{i-1} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = i) + \sum_{k=i}^{n} P(X = k)P_{(X=k)}(Y = i)$

$P(Y = i) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$ (il y a bien $n - i + 1$ termes)

6) a) Si $1 \leq i \leq k \leq n$: on a donc $i - 1 \geq 0$ $k - 1 \geq 0$ et $i - 1 \leq k - 1$

$i \binom{k}{i} = i \times \dfrac{k!}{i!(k-i)!} = \dfrac{k!}{(i-1)!(k-i)!}$ $k \binom{k-1}{i-1} = k \times \dfrac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} = \dfrac{k!}{(i-1)!(k-i)!}$.

Donc $i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$.

b) Y prend un nombre fini de valeurs, donc Y admet une espérance et

$E(Y) = \sum_{i=0}^{n} i.P(Y = i) = 0 \times P(Y = 0) + \sum_{i=1}^{n} \left(i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{i}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} \frac{i}{n} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} k \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i} \right)$$

Posons $j = i - 1$ $$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{k-j-1} \right)$$

$$= \frac{p}{n} \sum_{k=1}^{n} k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} p^{j} (1-p)^{k-1-j} \right)$$

(d'après la formule du binôme) $$= \frac{p}{n} \sum_{k=1}^{n} k(p+1-p)^{k-1} = \frac{p}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{p}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{p(n+1)}{2}$$