Correction D.M. n°6

Exercice 1 – EDHEC 2018

1) $\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^0 dt = \int_0^1 1dt = 1$ et $u_0 = 1$. La définition est bien cohérente.

2) a) $\dfrac{t^2}{1+t^2} = a + \dfrac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{a(1+t^2)+b}{1+t^2} \Leftrightarrow t^2 = at^2 + (a+b)$.

Par identification des coefficients, on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ donc $\dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$

(on pouvait aussi remarquer directement que $\dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{1+t^2-1}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$).

b) Intégration par parties : $\begin{cases} u(t) = \ln(1+t^2) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ v(t) = t \end{cases}$

u et v sont de classe C^1 sur [0,1] donc $u_1 = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{2t^2}{1+t^2}dt$

$= \ln(2) - 0 - 2\int_0^1 \left(1 - \dfrac{1}{1+t^2}\right)dt = \ln(2) - 2 + 2\int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}dt = \ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2}$.

3) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} - \left(\ln(1+t^2)\right)^n\right)dt = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n(\ln(1+t^2) - 1)dt$.

$\forall\, t \in [0;1]$, $o \le t \le 1$ $\quad 1 \le 1 + t^2 \le 2 \quad 0 \le \ln(1+t^2) \le \ln(2) \le 1$

donc $\ln(1+t^2)^n \ge 0$ $\quad \ln(1+t^2) - 1 \le 0 \quad \left(\ln(1+t^2)\right)^n(\ln(1+t^2)-1) \le 0$ donc par positivité de l'intégrale $u_{n+1} - u_n \le 0$ la suite est décroissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \in [0;1]$, $\ln(1+t^2)^n \ge 0$ donc $u_n \ge 0$. La suite est décroissante et minorée, donc elle converge.

4) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \in [0;1]$, $0 \le \ln(1+t^2) \le \ln(2)$ donc $0 \le \ln(1+t^2)^n \le \ln(2)^n$

Par inégalité de la moyenne, $0(1-0) \le u_n \le \ln(2)^n(1-0) \quad 0 \le u_n \le \ln(2)^n$

b) $-1 < \ln(2) < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(2)^n = 0$ donc par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

De plus la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln(2)^n$ converge ($-1 < \ln(2) < 1$) donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge aussi.

Exercice 2 – EML 2018

Partie I – Etude d'une première variable aléatoire

1. a. $(X = 0) = P_1 \cap P_2$ par indépendance des lancers, $P(X = 0) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

De même $(X = 1) = PFP \cup FPP$ donc $P(X = 1) = 2 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{27}$

$(X = 2) = PFFP \cup FPFP \cup FFPP$ donc $P(X = 2) = 3 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{27}$

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ = "lors des n+1 premiers lancers, on obtient un pile et n faces, et au n+2 ème lancer, on obtient un pile".

Il y a n + 1 possibilités de choix de place du premier pile. Par indépendance,

$P(X = n) = (n+1) \times \dfrac{2}{3}$ (1er pile) $\times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ (n faces) $\times \dfrac{2}{3}$ (deuxième pile) $= (n+1) \times \dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II – Etude d'une expérience en deux étapes

2. a. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(U = n)$ est possible (on obtient n faces, puis on tire la boule numéro n).
Donc $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

b. Si $(X = n)$: on place n+1 boules numérotées de 0 à n puis on tire une boule au hasard.

Donc $U_{(X=n)} \longrightarrow \mathcal{U}([[0;n]])$. $P_{(X=n)}(U = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \text{ si } k \leq n \ (\Leftrightarrow n \geq k) \\ 0 \text{ si } k > n \ (\Leftrightarrow n < k) \end{cases}$

c. La famille $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on obtient la loi marginale de U :

$$P(U = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P_{(X=n)}(U = k) = \sum_{n=0}^{k-1} P(X = n)\times 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}P(X = n)$$

$= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}}$ Posons $n' = n - k$ $(n = n' + k)$

$$= \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{4}{3^{n'+k+2}} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n'=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n'} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

e. $\sum k.P(U = k) = \frac{2}{9} \sum k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc la série converge absolument. Donc U admet une espérance et $E(U) = \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{1}{2}.$

De même, $\sum k^2 P(U = k) = \sum (k(k-1) + k) \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{27} \sum k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{2}{9} \sum k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$

Les séries convergent absolument et $E(U^2) = \frac{2}{27} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{27} \times \frac{27 \times 2}{8} + \frac{1}{2} = 1$

Donc U admet une variance et $V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

Ou mieux : Posons $U' = U + 1$. Alors $U'(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\forall k \geq 1$, $P(U' = k) = P(U + 1 = k) = P(U = k - 1) = \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ donc $U' \longrightarrow \mathcal{G}(2/3)$.

Donc $E(U') = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ $\quad V(U') = \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$ $\quad U = U' - 1$ donc $E(U) = E(U') - 1 = \frac{1}{2}$ et $V(U) = 1^2 V(U') = \frac{3}{4}.$

f. $P((X = 0)\cap(U = 1)) = 0$ Or $P(X = 0) \neq 0$ et $P(U = 1) \neq 0$ donc $P((X = 0)\cap(U = 1)) \neq P(X = 0)P(U = 1)$.
X et U ne sont pas indépendantes.

3. a. Si $X = n$, U est inférieur ou égal à n. Donc $X \leq U$ $\quad V \geq 0$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement $(X = n) \cap (U = 0)$ est possible. Donc $(V = n)$ est possible.
Donc $V(\Omega) = \mathbb{N}$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$: si $(X = n)$, V peut prendre les valeurs de 0 à n : $\forall j > n$, $P_{(X=n)}(V = j) = 0$.

$\forall j \leq n$, $P_{(X=n)}(V = j) = P_{(X=n)}(n - U = j) = P_{(X=n)}(U = n - j) = \frac{1}{n+1}$ (car $0 \leq n - j \leq n$) .

c. On retrouve la même loi conditionnelle que U. Le même calcul permet donc de montrer que V suit la même loi que U.

4. Soit $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$. $P((U = i) \cap (V = j)) = P((U = i)\cap(X = i + j) = P(X = i + j)P_{(X=i+j)}(U = i)$

$= (i + j + 1)\frac{4}{3^{i+j+2}} \times \frac{1}{i+j+1} = \frac{4}{3^{i+j+2}}$

$P(U = i)P(V = j) = \frac{2}{3^{i+1}} \times \frac{2}{3^{j+1}} = \frac{4}{3^{i+j+2}}$ donc $P((U = i) \cap (V = j)) = P(U = i)P(V = j)$. U et V sont indépendantes.

5. Donc $\mathrm{cov}(U, V) = 0$ $\quad \mathrm{cov}(X, U) = \mathrm{cov}(U + V, U) = \mathrm{cov}(U, U) + \mathrm{cov}(V, U) = V(U) = \frac{3}{4}$.

Partie III : Etude d'un jeu

6. a. Z compte le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un premier pile. Les lancers sont indépendants, donc $Z \longrightarrow \mathcal{G}(p)$. Donc $E(Z) = \frac{1}{p}$ et $V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

b. $Y = Z - 1$ donc Y admet une espérance et une variance, et $E(Y) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$

$V(Y) = 1^2 V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(Y \geq n)$ = "on a obtenu au moins n faces avant d'obtenir un pile" = "les n premiers sont des faces" = $F_1 \cap \ldots \cap F_n$. Par indépendance, $P(Y \geq n) = (1 - p)^n$.

7. a.et b.

```
def simule_X():
    nb_piles=0
    nb_faces=0
    while nb_piles<2:
        if rd.random()<2/3:
            nb_piles=nb_piles+1
        else:
            nb_faces=nb_faces+1
    return nb_faces

def simule_Y(p):
    return rd.geometric(p)-1
```

c. x compte le nombre de faces obtenus par A (= X) y simule Y.
Donc le joueur A gagne si et seulement si $x \leq y$.
Le programme effectue N simulations (avec $N = 10^4$) et compte le nombre de succès de A, divisé par N.
On obtient donc la fréquence du succès de A.

d. Le jeu est équilibré lorsque A gagne avec une probabilité égale à 1/2. On trouve environ p = 0,8.

8.a. $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P_{(X = n)}(Y \geq X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P_{(X = n)}(Y \geq n).$$

Or X et Y sont indépendantes, donc : $P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n)$.

b. Donc $P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1) \times \frac{4}{3^{n+2}}(1 - p)^n$

$$(n' = n + 1) \quad = \sum_{n'=1}^{+\infty} n'\frac{4}{3^{n'+1}} (1 - p)^{n'-1} = \frac{4}{9} \sum_{n'=1}^{+\infty} n' \left(\frac{1-p}{3}\right)^{n'-1} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1-p}{3}\right)^2} = \frac{4}{9} \times \frac{9}{(2 + p)^2} = \frac{4}{(2 + p)^2}.$$

c. Le jeu est équilibré lorsque $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (2 + p)^2 = 8 \Leftrightarrow 2 + p = \sqrt{8}$ (car $2 + p > 0$)

$\Leftrightarrow p = 2\sqrt{2} - 2$. Remarque : $2\sqrt{2} - 2 \approx 0,83$ On trouve un résultat cohérent avec notre résultat graphique.