Correction du D.M. n°7

Exercice 1 – EML 2017

1. On voit que $C_1 = C_3$, donc C n'est pas inversible. Donc 0 est une valeur propre de C.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $(C - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ 2x - \lambda y + 2z = 0 \\ y - \lambda z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + \lambda z = 0 \\ 2x - \lambda^2 z + 2z = 0 \\ y = \lambda z \end{cases}$

Si $\lambda = 0$: $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$

Donc $E_0(C) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ (le vecteur est non nul donc forme une base)

Si $\lambda \neq 0$: $\begin{cases} z = x \\ 2x - \lambda^2 x + 2x = 0 \\ y = \lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ (4 - \lambda^2)x = 0 \\ y = \lambda x \end{cases}$

Le système n'est pas de Cramer lorsque $4 - \lambda^2 = 0$ donc $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$.

Pour $\lambda = 2$: $\begin{cases} z = x \\ 0 = 0 \\ y = 2x \end{cases}$ donc $E_2(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (vecteur non nul donc base)

Pour $\lambda = -2$ $\begin{cases} z = x \\ 0 = 0 \\ y = -2x \end{cases}$ $E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (idem)

Exercice 2 – Ecricome 2016

1) $\dfrac{g_n(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = x^{3/2} g_n(x)$ $x^{3/2} \sim_{+\infty} (1+x)^{3/2}$ donc $x^{3/2}.g_n(x) \sim_{+\infty} \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^{1/2}}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^{1/2}} =$ (avec $X = 1 + x$) $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln(X)^n}{X^{1/2}} = 0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{3/2} g_n(x) = 0$

donc $g_n(x) =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

2) a) Soit $X \geq 0$. $\int_0^X g_0(t)dt = \int_0^X \dfrac{1}{(1+t)^2} dt = \left[-\dfrac{1}{1+t} \right]_0^X = -\dfrac{1}{1+X} + 1$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{1}{1+X} + 1 = 1$ donc $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ converge et vaut 1.

b) Pour $n \geq 1$, g_n est continue sur $[0; +\infty[$. $\forall x \geq 0$, $1 + x \geq 1$ $\ln(1+x) \geq 0$ $g_n(x) \geq 0$.

Les deux fonctions sont positives. De plus $g_n(x) =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}} dx$ converge ($3/2 > 1$), donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_n(t)dt$ est convergente.

c) Soit $X \geq 0$. On note $I_n(X) = \int_0^X g_n(t)dt$ $I_{n+1}(X) = \int_0^X g_{n+1}(t)dt$. Intégration par parties :

$\begin{cases} u(t) = (\ln(1+t))^{n+1} \\ v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{n+1}{1+t} (\ln(1+t))^n \\ v(t) = -\dfrac{1}{1+t} \end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ donc :

$I_{n+1}(X) = \left[-\dfrac{\ln(1+t)^{n+1}}{1+t} \right]_0^X + \int_0^X \dfrac{(n+1)(\ln(1+t))^n}{(1+t)^2} dt$ $I_{n+1}(X) = -\dfrac{\ln(1+X)^{n+1}}{1+X} + (n+1)I_n(X)$.

$\lim\limits_{X \to +\infty} I_{n+1}(X) = I_{n+1}$ $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln(1+X)^{n+1}}{1+X} = \lim\limits_{Y \to +\infty} \dfrac{\ln(Y)^{n+1}}{Y} = 0$ (croissances comparées) $\lim\limits_{X \to +\infty} I_n(X) = I_n$.

Donc par passage aux limites : $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

(d) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$

_ pour $n = 0$: $I_0 = 1$ $0! = 1$ la propriété est vraie.

_ supposons qu'à un rang n, $I_n = n!$

alors $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$

3) a) f_n est à support sur $[0; +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{n!}\int_0^{+\infty} g_n(x)dx = \dfrac{1}{n!}n! = 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$ converge et vaut 1.

b) $\forall x \geq 0$, $x.g_n(x) = \dfrac{x(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}$ $\dfrac{xg_n(x)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{x^2(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \sim_{+\infty} \dfrac{x^2(\ln(1+x))^n}{x^2} \sim_{+\infty} (\ln(1+x))^n$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xg_n(x)}{\frac{1}{x}} = +\infty$ donc $\dfrac{1}{x} =_{+\infty} o(x.g_n(x))$.

Les deux fonctions sont positives et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x}dx$ diverge, donc $\int_0^{+\infty} xg_n(x)dx$ diverge aussi.

4) a) $\forall x < 0$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

b) $\forall x \geq 0$, $F_0(x) = \int_{-\infty}^{x} f_0(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \dfrac{1}{(1+t)^2}dt = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.

c) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geq 0$, $F_k(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x \dfrac{g_k(t)}{k!}dt = \int_0^x \dfrac{(\ln(1+t))^k}{k!(1+t)^2}dt$

Intégration par parties : $\begin{cases} u(t) = \dfrac{(\ln(1+t))^k}{k!} \\ v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} \end{cases}$ $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{k}{k\,!}(\ln(1+t))^{k-1}\dfrac{1}{1+t} \\ v(t) = -\dfrac{1}{1+t} \end{cases}$ (u, v sont de classe C^1)

$F_k(x) = \left[-\dfrac{(\ln(1+t))^k}{k!(1+t)}\right]_0^x + \int_0^x \dfrac{(\ln(1+t))^{k-1}}{(k-1)\,!(1+t)^2}dt = -\dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)} + \int_0^x \dfrac{g_{k-1}(t)}{(k-1)!}dt = -\dfrac{(\ln(1+x))^k}{k!(1+x)} + F_{k-1}(x)$.

Donc $\forall k \geq 1$, $\forall x \geq 0$, $F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$.

d) $\forall x \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = F_0(x) + (F_1(x) - F_0(x)) + \ldots + (F_n(x) - F_{n-1}(x)) = F_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{n}(F_k(x) - F_{k-1}(x))$

$= 1 - \dfrac{1}{1+x} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\dfrac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$.

e) pour $x < 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$.

pour $x \geq 0$: On reconnait la somme partielle de la série exponentielle.

Donc $F_n(x)$ admet une limite et $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+x}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}(\ln(1+x))^k$.

$= 1 - \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+x}\left(e^{\ln(1+x)} - 1\right) = 1 - \dfrac{1}{1+x} - 1 + \dfrac{1}{1+x} = 0$.