D.M. n°8 - Correction

Exercice 1

Remarque : $U \longrightarrow \mathcal{U}(]0\,;1])$ donc $0 < U \leq 1$ ln(U) existe et $\ln(U) \leq 0$ $-2\ln(U) \geq 0$ donc $\sqrt{-2\ln(U)}$ existe.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(a\sqrt{-2\ln(U)} \leq x) = P\left(\sqrt{-2\ln(U)} \leq \frac{x}{a}\right)$ (car $a > 0$).

Si $x < 0$: pas de solution $F_Y(x) = 0$

Si $x \geq 0$: $F_Y(x) = P\left(-2\ln(U) \leq \frac{x^2}{a^2}\right)$ (car la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$)

$= P\left(\ln(U) \geq -\frac{x^2}{2a^2}\right) = P\left(U \geq \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\right) = 1 - F_U\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)\right)$

Or $F_U(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ y \text{ si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 \text{ si } y > 1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) > 0$ De plus $\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2a^2} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$ toujours vrai

$\forall x \geq 0$, $0 \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \leq 1$ donc $F_Y(x) = 1 - F_U(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$. Donc $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

2) On voit que F_Y est continue et de classe C^1 sur $]-\infty\,;0[$ et $]0;+\infty[$.

De plus $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) = 0$ donc F_Y est continue en 0.

F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, donc Y est une variable à densité.

$F_Y'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$. Donc une densité de Y est : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{x}{a^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Exercice 2

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = 1 - P(Y > x) = 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x))$ (car $Y = \min(X_1, X_2)$)

$= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)$ (par indépendance)

$= 1 - P(X_1 > x)^2$ (même loi) $= 1 - (1 - F_{X1}(x))^2$

Or $F_{X1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. Donc si $x < 0$, $F_Y(x) = 1 - (1-0)^2 = 0$

Si $x \geq 0$, $F_Y(x) = 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda x}))^2 = 1 - (e^{-\lambda x})^2 = 1 - e^{-2\lambda x}$.

Donc $F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-2\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. Donc Y suit la loi exponentielle de paramètre 2λ.

Exercice 3 1. a) Si f est solution de (*), $f(0) = a + \int_0^0 b.f(t)dt = a$

b) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \longmapsto b.f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $x \longmapsto \int_0^x b.f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée b.f

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = b.f(x)$.

f ' est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) f est solution de l'équation $y' - by = 0$, qui a pour solutions : $y(t) = \lambda e^{bt}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(t) = \lambda e^{bt}$ et $f(0) = a \Leftrightarrow \lambda = a$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = a.e^{bt}$

2. Inversement, si f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = a.e^{bt}$, alors :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $a + \int_0^x b.f(t)dt = a + \int_0^x bae^{bt}dt = a + \left[ae^{bt}\right]_0^x = a + ae^{bx} - a = ae^{bx} = f(x)$.

Donc cette fonction est bien solution de (*).